

Bau

Série : D
Durée : 4 heures
Coefficient : 4
Trois pages.

Exercice 1 (5 points)

- I. 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $9z^2 - 6z + 2 = 0$.
On désignera par u et v les deux solutions de l'équation, u étant la solution dont la partie imaginaire est positive.
2. Ecrire u et v sous forme trigonométrique.
- II. Soit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points M_n du plan complexe d'affixe z_n telle que :
 $z_0 = 1$ et pour tout entier n : $z_{n+1} = \frac{1+i}{3} z_n$.
- Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \arg(z_n)$.
 - Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$.
 - Exprimer u_n en fonction de n .
 - Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = |z_n|$.
 - Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
 - En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - Déduire de ce qui précède l'expression de z_n en fonction de n .
 - Pour quelles valeurs de l'entier naturel n :
 - z_n est-il réel ? Déterminer alors z_n .
 - z_n est-il imaginaire pur ?
 - Pour tout entier naturel n , calculer $w_n = |z_{n+1} - z_n|$ en fonction de n .
On remarquera que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
 - On pose : $k_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.
 - Exprimer k_n en fonction de n .
 - Donner une interprétation géométrique de k_n .
 - Déterminer la limite de k_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient deux boules numérotées 1, deux boules numérotées (-1) et trois boules numérotées 0. On dispose en réserve d'une boule numérotée (-1). Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Taty participe au jeu suivant ; il tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée porte le numéro 1, il gagne 500 francs et le jeu s'arrête ;
- si la boule tirée porte le numéro (-1), il perd 500 francs et le jeu s'arrête ;
- si la boule tirée porte le numéro 0, on introduit la boule de réserve numérotée (-1) dans l'urne sans remettre la boule numérotée 0 que Taty vient de tirer, et Taty procède à un nouveau tirage d'une boule de l'urne :
 - si la boule tirée porte le numéro 1, il gagne 500 francs et le jeu s'arrête ;
 - si la boule tirée porte le numéro 0, il gagne 250 francs et le jeu s'arrête ;
 - si la boule tirée porte le numéro (-1), il perd 500 francs et le jeu s'arrête.

1. a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Taty gagne 500 francs au premier tirage »

B : « Le jeu s'arrête au premier tirage ».

b. Soit l'événement C : « Taty perd au jeu ».

Démontrer que : $P(C) = \frac{23}{49}$.

2. On considère la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X. Que peut-on en déduire ?

3. Taty effectue une série de trois parties.

Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie.

Problème (11 points)

Partie A : résolution d'une équation différentielle.

On se propose de résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$ (E)

1. Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

2. On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} et telles que :

$$f(0) = \ln(2) \text{ et pour tout réel } x : f(x) = e^{2x} g(x).$$

a. Calculer g(0).

b. Calculer f'(x) en fonction de g'(x) et de g(x).

c. Démontrer que f est solution de l'équation (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

d. En déduire l'expression de g(x) puis celle de f(x) sachant que f est solution de l'équation (E).

Partie B : étude de la fonction h.

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$$

On note (C) la courbe représentative de h dans un plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i} , \vec{j}) (unité graphique : 3 cm).

I. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction k définie sur \mathbb{R} par : $k(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x} + 1}$

1. Déterminer les limites de k en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de k et dresser son tableau de variation.
3. En déduire le signe de $k(x)$ pour tout réel x .

II. Etude de la fonction h

1. a. Déterminer la limite de h en $+\infty$.

On pourra poser $t = \frac{1}{e^{2x}}$ et utiliser $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

- b. Démontrer que pour tout réel x , on a : $h(x) = e^{2x} [-2x + \ln(1 + e^{2x})]$.
En déduire la limite de h en $-\infty$.

2. a. Démontrer que pour tout réel x , $h'(x) = 2e^{2x} k(x)$.
b. En déduire le sens de variation de h .
c. Dresser le tableau des variations de h .

3. Tracer avec soin la courbe (C) .

4. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction u définie par :

$$u(x) = \frac{1}{1 + e^{-2x}}$$

On remarquera que pour tout réel x , $\frac{1}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

5. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $(x = -1)$ et $(x = 0)$.

11E D



LE BAREME EST DONNE A TITRE INDICATIF
ET PEUT DONC ETRE MODIFIE PAR LE JURY.

EXERCICE 1 5 POINTS

I EQUATION DU SECOND DEGRE DANS \mathbb{C}

1. RESOLUTION DE $9z^2 - 6z + 2 = 0$

$$\Delta = -36 = (6i)^2$$

$$\text{SOLUTIONS : } \begin{cases} u = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(1+i) \\ v = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i = \frac{1}{3}(1-i) \end{cases} \quad (0,5)$$

2. FORME TRIGONOMETRIQUE DES SOLUTIONS

$$u = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (0,5)$$

$$v' = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

II NOMBRES COMPLEXES ET SUITES

$$M_n \rightarrow z_n \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{3} z_n = u z_n \end{cases}$$

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $u_n = \arg z_n$.

a) SUITE ARITHMETIQUE $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$u_{n+1} = \arg z_{n+1} = \arg u + \arg z_n$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\pi}{4} \quad (0,25)$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$ et de premier terme $u_0 = \arg z_0 = 0$.

b) TERME GENERAL DE (u_n)

$$u_n = \frac{\pi}{4} n \quad (0,25)$$

2. SUITE $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $v_n = |z_n|$

a) SUITE GEOMETRIQUE $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$v_{n+1} = |z_{n+1}| = |u \times z_n| = |u| \times |z_n|$$

$$v_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3} v_n \quad (0,25)$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $v_0 = |z_0| = 1$.

b) TERME GENERAL DE (v_n)

$$v_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^n \quad (0,25)$$

3. EXPRESSION DE z_n : FORME TRIGONOMETRIQUE

$$z_n = |z_n| \left[\cos(\arg z_n) + i \sin(\arg z_n) \right]$$

$$\text{soit } z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^n \left[\cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) \right] \quad (0,5)$$

4. a) z_n est réel ssi $\text{Im}(z_n) = 0$

$$\text{c.à.d. } \sin \left(\frac{n\pi}{4} \right) = 0$$

$$\text{soit } \frac{n\pi}{4} = k\pi,$$

$$\text{D'où } \begin{cases} n = 4k, \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^{4n} (-1)^n \quad (0,5) \quad (0,75)$$

b) z_n est imaginaire pur ssi $\text{Re}(z_n) = 0$

$$\text{c.à.d. } \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) = 0$$

$$\text{soit } \frac{n\pi}{4} = (2k+1) \frac{\pi}{2},$$

$$\text{D'où } \begin{cases} n = 4k+2, \\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (0,5) \quad (0,25)$$

5. $w_n = |z_{n+1} - z_n| = M_n M_{n+1}$

$$w_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = |u z_{n+1} - u z_n|$$

$$w_{n+1} = |u| \times |z_{n+1} - z_n|$$

$$\text{D'où } w_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{3} w_n \quad (0,25)$$

Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $w_0 = |z_1 - z_0| = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 1/5

en déduit que :

$$W_n = \frac{\sqrt{5}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \quad (0,5)$$

6. $R_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

a) EXPRESSION DE R_n EN FONCTION DE n

R_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

d'où $R_n = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{3}}$

Soit $R_n = \frac{\sqrt{5}}{3 - \sqrt{2}} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \right]$ (0,5)

b) INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE R_n

$R_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} + W_n$

25) $R_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$

C'est donc la longueur de la ligne brisée $M_0M_1M_2 \dots M_{n+1}$.

c) CONVERGENCE

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \frac{\sqrt{5}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{10}}{7}$ (0,25)

EXERCICE 2 4 POINTS

- 2 BOULES N° 1
- 2 BOULES N° -1 RESERVE 1 BOULE N° -1
- 3 BOULES N° 0

1. a) CALCUL DE PROBABILITES

A: « TATY gagne 500F au premier tirage »

B: « LE jeu s'arrête au premier tirage »

$P(A) = \frac{2}{7}$ (0,5) et $P(B) = \frac{4}{7}$ (0,5)

b) PROBABILITE DE L'EVENEMENT C

C: « TATY PERD AU JEU »

$P(C) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$

soit $P(C) = \frac{23}{49}$ (0,5)

2. VARIABLE ALEATOIRE

a) LOI DE PROBABILITE DE X

VALEURS DE X : -500 ; 250 ; 500

$P(X = -500) = P(C) = \frac{23}{49}$

$P(X = 250) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{49}$

$P(X = 500) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{20}{49}$

$X = x_i$	-500	250	500	TOTAL
$P(X = x_i)$	$\frac{23}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{20}{49}$	1

b) ESPERANCE MATHEMATIQUE

$E(X) = -500 \times \frac{23}{49} + 250 \times \frac{6}{49} + 500 \times \frac{20}{49}$

(0,5) $E(X) = 0$ (0,25) donc le jeu est EQUITABLE

3. PROBABILITE QUE TATY GAGNE AU MOINS UNE PARTIE SUR TROIS

$P = 1 - \left(\frac{23}{49}\right)^3$
 $P \approx 0,89658$ (0,75)

PROBLEME 11 POINTS

PARTIE A : RESOLUTION D'UNE EQUATION

DIFFERENTIELLE (2,5 POINTS)

1. EQUATION $y^2 - 2y = 0$ avec $y(0) = 1$

SOLUTIONS : fonctions $x \mapsto C e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

SOLUTION AVEC $y(0) = 1$: fonction $x \mapsto e^{2x}$ (0,5)

2. FONCTIONS f et g

$$\begin{cases} f(0) = \ln 2 \\ f(x) = e^{2x} g(x) \end{cases}$$

a) CALCUL DE $g(0)$

$f(0) = g(0)$ alors $g(0) = \ln 2$ (0,25)

b) CALCUL DE $f'(x)$

$$f'(x) = 2e^{2x} g(x) + e^{2x} g'(x)$$

d'où $f'(x) = [2g(x) + g'(x)] e^{2x}$ (1) (0,5)

c) F SOLUTION DE (E) équivaut à $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

Si f est solution de (E), alors :

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}} \quad \text{c.à.d}$$

$$2g(x)e^{2x} + g'(x)e^{2x} - 2e^{2x}g(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

d'où $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

* RECIPROQUEMENT

Si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ alors (0,5)

$$f'(x) - 2e^{2x}g(x) = g'(x)e^{2x} \quad \text{d'après (1)}$$

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \cdot e^{2x}$$

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

Donc f est solution de (E) c.q.f.d.

d) EXPRESSIONS DE $g(x)$ ET DE $f(x)$

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{U'(x)}{U(x)} \quad \text{avec } U(x) = 1+e^{-2x}$$

d'où $g(x) = \ln(1+e^{-2x})$ (0,5)

et donc $f(x) = e^{2x} \ln(1+e^{-2x})$ (0,25)

PARTIE B : ETUDE DE LA FONCTION h
(8,5 POINTS)

ETUDE DE LA FONCTION

$$h : x \mapsto e^{2x} \ln(1+e^{-2x})$$

I. ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

$$k : x \mapsto \ln(1+e^{-2x}) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$$

1. LIMITES

en $+\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x} + 1} = 0$
Donc (0,5)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$

en $-\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{2x} + 1} = 1$
Donc (0,5)
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 1$

2. VARIATIONS

$$h'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} + \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Après réduction et simplification on a :

$$h'(x) = \frac{-2}{(e^{2x}+1)^2} \quad (0,5)$$

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) < 0$ (0,5)
alors h est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

TABLEAU DES VARIATIONS

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$		-
$h(x)$	$+\infty$	0

3. SIGNE DE $h(x)$

h est dérivable et strictement décroissante sur \mathbb{R} et on a: $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$
 h prend donc ses valeurs dans $]0, +\infty[$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$ (0,5)

II. ETUDE DE LA FONCTION $h: x \mapsto e^{2x} \ln(1+e^{-2x})$

1. a) LIMITE EN $+\infty$

Posons $t = \frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$ alors $e^{2x} = \frac{1}{t}$

d'où $e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) = \frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ } alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ (1)

b) LIMITE EN $-\infty$

$h(x) = e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) = e^{2x} \ln\left(\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}\right)$

$h(x) = e^{2x} [\ln(1+e^{2x}) - \ln e^{2x}]$

Soit $h(x) = e^{2x} [-2x + \ln(1+e^{2x})]$ (0,5)
 $= -2xe^{2x} + e^{2x} \ln(1+e^{2x})$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x)e^{2x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{\ln(1+e^{2x})} = 0$ } alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ (0,5)

2. VARIATIONS

a) DERIVEE

$h'(x) = 2e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) + e^{2x} \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$h'(x) = 2e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$h'(x) = 2e^{2x} \left[\ln(1+e^{-2x}) - \frac{1}{1+e^{2x}} \right]$

Soit $h'(x) = 2e^{2x} k(x)$ (0,5)

b) SENS DE VARIATION

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^{2x} > 0$ alors $h'(x)$ est du signe de $k(x)$.

On peut donc déduire du I.3 que:

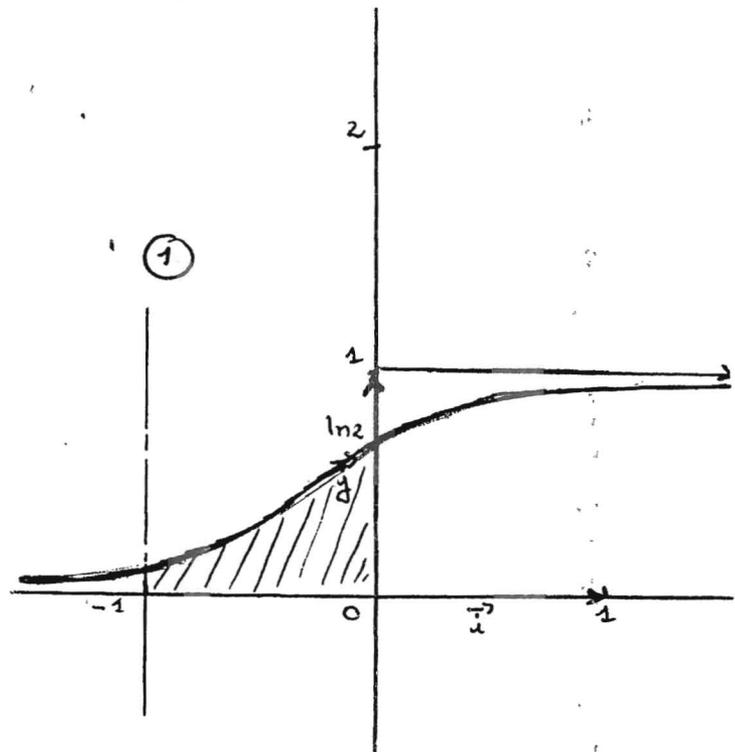
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) > 0$ (0,25)

h est strictement croissante sur \mathbb{R} .

c) TABLEAU DES VARIATIONS

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	1

3. TRACE DE LA COURBE



PRIMITIVE

$$u: x \mapsto U(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$U(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Ainsi une primitive sur \mathbb{R} de la fonction u est la fonction U définie sur \mathbb{R} par:

$$U(x) = \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) \quad (0,5)$$

5. CALCUL D'AIRES \mathcal{A} :

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < y < h(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 h(x) dx \quad \text{u.g.} = \int_{-1}^0 e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) dx$$

Posons

$$\begin{cases} U(x) = \ln(1+e^{-2x}) \\ U'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \end{cases} \quad \begin{cases} V(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \\ V'(x) = e^{2x} \end{cases}$$

INTEGRATION PAR PARTIES: $\int UV' = [UV] - \int U'V$

$$\int_{-1}^0 e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \ln(1+e^{-2x}) + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) \right]_{-1}^0 \\ &= \left(\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 \right) - \left(\frac{1}{2} e^{-2} \ln(1+e^2) + \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2}) \right) \\ &= 1 + \ln 2 - \left(\frac{1+e^2}{2e^2} \right) \ln(1+e^2). \end{aligned}$$

$$(1,5) \quad \mathcal{A} = 9 \left[1 + \ln 2 - \frac{(1+e^2)}{2e^2} \ln(1+e^2) \right] \text{cm}^2$$