T 053

D

DUREE : 4 Heures

Le candidat doit traiter les deux Exercices et le Problème.

EXERCICE 1

On considère les nombres complexes ci-après :

$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

1. a. Ecrire le produit $z_1 z_2$ sous forme algébrique.

   b. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1, z_2 et $z_1 z_2$.

   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. On pose $z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_1$.

   a. Vérifier que $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$.

   b. En déduire le module et un argument de z_3.

   c. Démontrer que z_3^{12} est un nombre réel strictement négatif.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.

   a. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z_1.

   b. Placer le point B, puis le point A en utilisant la question 3.a.

   c. Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

   $\left|z - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \left|z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right|$.

Suite en page 2

EXERCICE 2

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(0 ; 1 ; -2) , B(-1 ; 0 ; -1), C(0 ; -5 ; -5) , D(2 ; 0 ; -2) et E(1 ; -4 ; -6).

1.a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Calculer l'aire du triangle ABC.

2. Démontrer que le quadrilatère ABCE est un rectangle.

3.a. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D et perpendiculaire au plan (ABC).

4. On désigne par H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

a. Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

c. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}.$$

Suite en page 3

1. a. Démontrer que, pour tout x apartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2} .$$

b. Etuidier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$.

3. a. Dresser le tableau des variations de g.

b. En déduire que l'équation : $g(x) = 0$, admet une solution unique α

et que : $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

5.a. Démontrer que, pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$ on a :

$f'(x) = g(x)$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

6. On pose $k(x) = xf(x)$ pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$ (on pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$)

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

7.a. Démontrer que f est continue à droite en 0. (On pourra écrire

$x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$).

Suite en page 4

b. Etudier la dérivabilté de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

8.a. Dresser le tableau des variations de f.

b. Donner l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ (on prendra $f(\alpha) \simeq 0{,}805$).

9. Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

a. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$J_\lambda = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$$

b. Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$.

c. Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} A(\lambda)$.

FIN

BACCALAUREAT 2009

Session de Juin 2009

CORRIGE-TYPE ET BAREME

Matière : MATHÉMATIQUES

Série : D

(20 points) **Exercice 1 :**

1°) ~~a.)~~ Ecrivons $z_1 z_2$ sous forme algébrique :

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (2pts)$$

b.) Ecrivons sous forme exponentielle z_1, z_2 et $z_1 z_2$:

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$ (1pt) ; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ (1pt)

et $z_1 z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ (1pt)

c.) Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$:

$$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \text{ donc}$$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (1pt) et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (1pt)

2°) a.) Vérifions que : $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

$$z_3 = 1 - e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} - \left(e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^2$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$$

$$z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) \quad (1pt)$$

b.) Déduisons-en le module et un argument de z_3 :

$$z_3 = 2i\sin\frac{\pi}{12}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{12}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} \quad (1pt)$$

or $2\sin\frac{\pi}{12} > 0$ donc

$$|z_3| = 2\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$|z_3| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad (1pt)$$

et un argument de z_3 est $\frac{5\pi}{12}$ (1pt)

c.) Démontrons que $z_3^{12} \in \mathbb{R}_-^*$

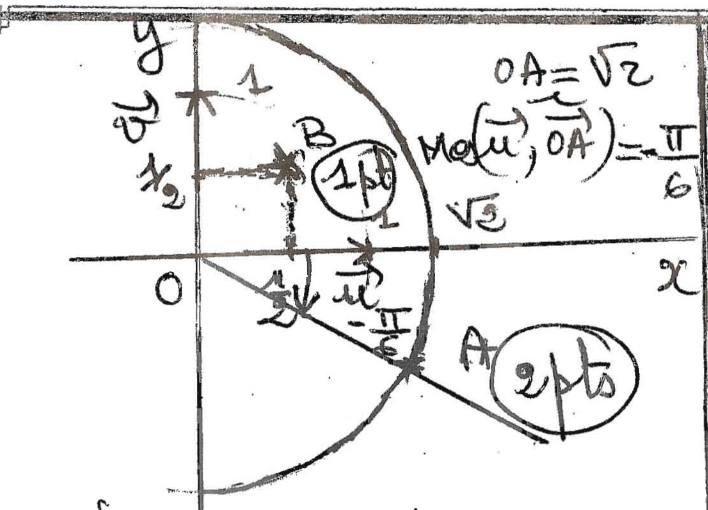
$$z_3^{12} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^{12} \cdot e^{i5\pi} = -\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^{12}$$

d'où $z_3^{12} < 0$ (2pts)

3°) a.) Donnons une interprétation géométrique du module et d'un argument de z_1 :

(1pt) $|z_1| = OA$ et un argument de z_1 est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{OA})$. (1pt)

b Plaçons B, puis A :



c.) Déterminons géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\left|z-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|$

$\left|z-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \left|z-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = AM$

$\left|z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \left|z-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right| = BM$ (1pt)

$\left|z-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \left|z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right| \iff AM=BM$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB] (1pt)

(16pts) Exercice 2 :

1°) a.) Démontrons que A, B et C ne sont pas alignés :

$\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ et $\overrightarrow{AC}(0;-6;-3)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(9;-3;6)$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ (1pt)

donc A, B et C ne sont pas alignés (1pt)

b.) Calculons l'aire du triangle ABC :

Soit $\mathcal{A}$ cette aire.

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ u.a $= \frac{3\sqrt{14}}{2}$ u.a (1pt)

(1pt)

$\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$ u.a

2°) Démontrons que ABCE est un rectangle :

$\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ et $\overrightarrow{EC}(-1;-1;1)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$ donc ABCE est un parallélogramme (*) (1pt)

$\overrightarrow{AE}(1,-5,-4)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = -1+5-4$
$= -5+5$
$= 0$

donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$ (**) (1pt)

De (*) et (**), on déduit que ABCE est un rectangle.

3°) a.) Donnons une équation cartésienne du plan (ABC):

$(ABC): 3x-y+2z+5=0$ (2pts)

b.) Déterminons une représentation paramétrique de (Δ):

$(\Delta): \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -t \\ z = -2+2t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ (2pts)

4°) a.) Déterminons les coordonnées de H :

On a: $\{H\} = (\Delta)\cap(ABC)$ donc $H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-3\right)$. (2pts)

b.) Calculons la distance de D au plan (ABC): (2pts)

$d(D,(ABC)) = DH = \frac{\sqrt{14}}{2}$ u.l

c.) Calculons le volume du tétraèdre ABCD :

Soit V ce volume.

$V = \frac{1}{3} DH \times \mathcal{A}$ u.v

$V = \frac{7}{2}$ u.v (2pts)

Problème : 44pts

Partie A :

1°) a-) Démontrons que pour tout x élément de $]0,+\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$:

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{-2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad \text{2pts}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2} \quad \text{1pt}$$

b.) Etudions le signe de $g'(x)$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)^2}$

or, $\forall x \in]0,+\infty[$,

$\frac{2(x+1)}{x(x^2+1)^2} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-1$.

Ainsi :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 1pt

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[$ 1pt

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$ 1pt

2°) Calculons $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = 0 \quad \text{2pts}$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = +\infty \quad \text{2pts}$$

3°) a-) Dressons le tableau des variations de g :

* g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,1]$.

* Tableau des variations de g (1pt + 1pt)

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - 1$	$\nearrow$	0

b.) Déduisons-en que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $0,5<\alpha<0,6$

* g est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$ et $g(]0,1[) =]-1+\ln 2;+\infty[$ et $0 \in]-1+\ln 2,+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans $]0,1[$ 1pt

* g est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $g([1,+\infty[) = [-1+\ln 2;0[$ et $0 \notin [-1+\ln 2,0[$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans $[1,+\infty[$. 1pt

* Il résulte de tout ce qui précède que l'équation $g(x)=0$ admet une solution

unique α dans $]0,+\infty[$ (1pt)

* Par ailleurs : $g(0,5) \simeq 0,09$ et $g(0,6) \simeq -0,114$ donc $g(0,5) \cdot g(0,6) < 0$ d'où

$0,5 < \alpha < 0,6$ (1pt)

4°) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

g est continue sur $]0,+\infty[$ et $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ donc g garde un signe constant sur chacun des intervalles $]0,\alpha[$ et $]\alpha,+\infty[$

or $0,5 \in]0,\alpha[$ et $g(0,5)>0$ donc $\forall x \in]0,\alpha[$, $g(x)>0$;

$0,6 \in]\alpha,+\infty[$ et $g(0,6)<0$ donc $\forall x \in]\alpha,+\infty[$, $g(x)<0$

En résumé pour tout x élément de $]0,+\infty[$:

$g(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ (1pt)

$g(x)<0 \Leftrightarrow x \in]\alpha,+\infty[$ (1pt)

$g(x)>0 \Leftrightarrow x \in]0,\alpha[$ (1pt)

Partie B :

5°) a-) Démontrons que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et : $\forall x \in]0,+\infty[$,

$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+x\,\frac{-2}{x(x^2+1)}$

$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}=g(x)$ (2pts)

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)$

b-) Déduisons-en le sens de variation de f :

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)$ donc :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x \in]0;\alpha[$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in]\alpha;+\infty[$

d'où f est strictement croissante sur $]0,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha,+\infty[$. (2pts)

6°) a-) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$

$k(x)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln(1+h)}{h}$

avec $h=\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=1$ (2pts)

b-) Déduisons-en que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

Pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x)=\frac{k(x)}{x}$ (1pt)

$\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (1pt)

7°) a) Démontrons que f est continue à droite en 0 :

Soit D l'ensemble de définition de f. $D = [0, +\infty[$

* $0 \in D$ et $f(0) = 0$ (1pt)
* Pour $x > 0$, $f(x) = x\left[\ln(1+x^2) - \ln x^2\right]$

$= x\ln(1+x^2) - 2x\ln x$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ d'où f est continue à droite (1pt) en 0.

b) Etudions la dérivabilité de f en 0 :

Pour $x > 0$ $\frac{f(x)}{x} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (1pt)

donc f n'est pas dérivable à droite en 0. (1pt)

Interprétation géométrique

f est continue en 0, et

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

donc $(\mathcal{C})$ admet en 0 une demi tangente verticale définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (1pt)

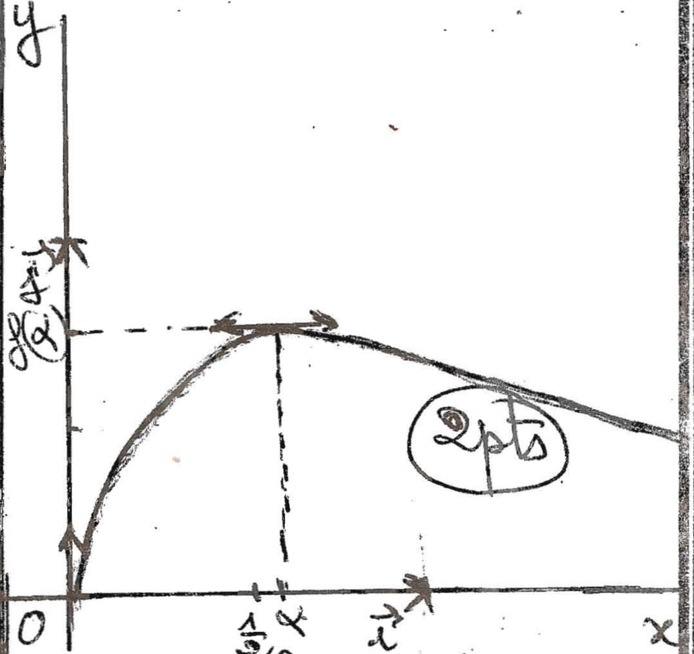
8°) a) Dressons le tableau des variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(2pts)

b) Donnons l'allure de $(\mathcal{C})$:

* La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$ (1pt)
* Allure de $(\mathcal{C})$.



9°) a) Calculons J_λ :

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, en particulier sur $[\lambda, 1]$, $\lambda \in]0, 1[$, donc J_λ existe et on a :

$J_\lambda = \left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 \frac{-x}{x^2+1}\,dx$ (1pt)

(1pt) $= \left[\frac{1}{2}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_\lambda^1$

$= \ln 2 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2)$

$J_\lambda = \ln 2 - \frac{1}{2}\lambda^2 \ln\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)$

$- \frac{1}{2}\ln(1+\lambda^2)$ (1pt)

b-) Calculons $A(\lambda)$

f est continue sur $[\lambda, 1]$ et $\forall x \in [\lambda, 1]$, $f(x) \geq 0$ donc

$A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$ u.a.

$A(\lambda) = J_\lambda \times 25 cm^2$ (2pts)

c- Calculons $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$:

$\lim\limits_{\lambda \to 0^+} J_\lambda = \ln 2$ donc

$\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = 25 \times \ln 2 \, cm^2$ (2pts)