

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Suites numériques (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$$

1. a. Calculer : u_1 et u_2 .
- b. Démontrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n .
 - a. Calculer : v_0 et v_1 .
 - b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. a. Montrer que $v_n = 5\left(\frac{1}{5}\right)^n$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - b. Calculer $A_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ et en déduire $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 - c. Calculer la limite de A_n puis la limite de S_n .

Exercice 2 : Etude d'une fonction comportant ln (6 points)

La courbe (C) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x.$$

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a- Vérifier que : $f(x) = x^2 \left(-1 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{8 \ln x}{x^2} \right)$.
b- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
4. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
6. a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-après (les résultats seront arrondis à 10^{-4} près).

x	6,18	6,19	6,20	6,21
f(x)	0,0371	0,0004	-0,0364	-0,0736

b. L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions, 1 et α dans $]0 ; +\infty[$. À l'aide de la question précédente, donner sans justification un encadrement à 10^{-2} près de α .

7. Tracer la restriction de la courbe (C) sur l'intervalle $]0;8]$ dans un repère (O ; I ; J) d'unité graphique 1 cm.

Problème : Statistiques et Probabilités conditionnelles (9 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Tous les élèves d'un lycée du Gabon sont abonnés dans l'un des deux clubs suivants : le club littéraire L et le club scientifique S.

On s'intéresse aux membres de ces deux clubs.

PARTIE A : Dans le club littéraire L (5 points)

Le tableau suivant donne le nombre de membres du club littéraire L lors des cinq premiers mois de l'année 2016.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5
Nombre de membres y_i	51	49	48	46	44

- Représenter le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J). Unités graphique : 1 cm pour une unité sur l'axe (OI) et 1 cm pour dix unités sur l'axe (OJ).
 - Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer G dans le repère précédent.
 - Un ajustement linéaire est-il justifié ? Justifier votre réponse.
- Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
 - Tracer cette droite dans le repère (O, I, J).
 - A l'aide de cet ajustement, déterminer le nombre de membres que le club littéraire peut estimer avoir au mois de décembre 2016 ? (arrondir à l'unité près).

PARTIE B : Dans les deux clubs (4 points)

On a constaté après une assez longue période d'observation que :

- 65% des élèves sont membres du club L ;
- Dans le club L, 60% des membres sont des filles ;

- Dans le club S, $\frac{2}{3}$ des membres sont des garçons :

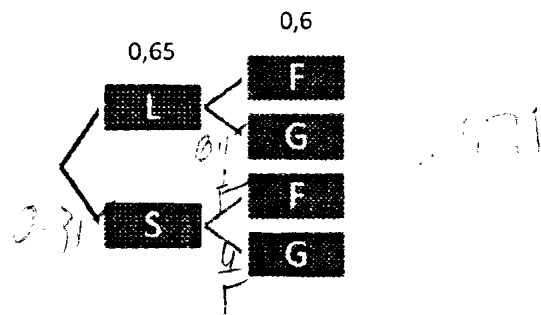
On choisit au hasard un élève de ce lycée.

On considère les événements suivants :

- L : « L'élève choisi est un membre du club littéraire L »
- S : « L'élève choisi est un membre du club scientifique S »
- F : « L'élève choisi est une fille »
- G : « L'élève choisi est un garçon »

Pour toutes les questions, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



1,25

0,71

0,21

2. Déterminer la probabilité de l'évènement « L'élève choisi est une fille et est dans le club L ». $0,139$
3. Calculer la probabilité de l'évènement F. $0,446$
4. L'élève choisi est une fille. Déterminer la probabilité qu'elle soit membre du club L.

1
1

$0,139$