RÉPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAURÉAT

2013 - MATHÉMATIQUES
Série : **A1**
Durée : 3 heures
Coef. : 4

Exercice 1 : Probabilité (5 points)

1. Soit Ω l'univers des évènements d'une expérience aléatoire. A et B deux évènements de Ω
   On donne les expressions suivantes :
   $p(A)+p(B)$, $p(B)-p(A)$, $1-p(A)$, $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, 1 , $p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
   Donner à l'aide de ce qui précède l'expression correspondante à :
   $p(A\cup B)$, $p(\overline{A})$, $p(\Omega)$ et $p_B(A)$
2.
- Si deux évènements A et B sont indépendants alors : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
- Si deux évènements A et B sont incompatibles alors : $P(A\cap B)=0$

   a. Recopier et compléter le tableau suivant dans le cas où A et B sont des évènements **indépendants.**

	P(A)	P(B)	$P(\bar{A})$	$P(\bar{B})$	$P(A\cap B)$	$P(A\cup B)$
1er cas	0,2			0,6		
2eme cas			0,7		0,06	

   b. Recopier et compléter le tableau ci – dessous dans le cas où A et B sont des évènements **incompatibles**.

	P(A)	P(B)	$P(\bar{A})$	$P(\bar{B})$	$P(A\cap B)$	$P(A\cup B)$
1er cas	0,2			0,6		
2eme cas			0,7			0,65

Exercice 2 : Suite géométrique. (5 points)

On raconte que l'inventeur de l'échiquier de 64 cases demanda, comme humble récompense un grain de blé sur la 1ere case, deux grains de blé sur la 2e case, 4 grains sur la 3e case, 8 sur la 4e, 16 sur la 5e et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de blé à chaque nouvelle case.

1. Recopier et compléter le tableau ci – dessous.

n° case	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de grains	1	2	4	8				

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $u_n=2^{n-1}$.

2. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   c. En déduire le nombre de grains de blé correspondant à la 64e case.

2. a. Montrer que : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 2^n - 1$.

   b. Que représentent S_7 et S_{64}.

3. Calculer S_{64} ?

4. Un grain de blé pèse 0,05g, calculer la production, en tonnes, à payer à l'inventeur (on donne : 1 tonne = 20 millions de grains).

Problème : Etude d'une fonction logarithme népérien. (10 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction numérique g définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{x}{x+1}$

1. Déterminer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de la fonction g.
2. Montrer que $g'(x) > 0$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.
3. a. Calculer $g(0)$.
   b. Montrer que $g(x) \geq 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ de deux manières différentes.

Partie B : Etude de la fonction f.

On considère la fonction numérique f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0, puis interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Calculer la fonction dérivée f' de f. On pourra l'exprimer à l'aide de la fonction dérivée g' de g et de la fonction g. (indication : $f(x) = ln[g(x)]$ sur $]0\,;\,+\infty[$)
   b. Montrer que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[, f'(x) > 0$.
   c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$.
4. Soit h la fonction numérique définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \ln(x-1)$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
   c. Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Partie C : Calcul d'aire.

On considère la fonction numérique F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $F(x) = xlnx - (x+1)ln\,(x+1)$ et la fonction H définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $H(x) = (x-1)\ln(x-1) - x$

1. a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Montrer que H est une primitive de h sur $]1\,;\,+\infty[$.

2. Calculer $\int_2^3 [h(x) - f(x)]dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.

BAC 2013-Maths A1

Proposition de correction

Exercice 1

1.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)\,; p(\bar{A}) = 1 - p(A); p(\Omega) = 1; p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

2. a. Les événements A et B sont indépendants :

	$p(A)$	$p(B)$	$p(\bar{A})$	$p(\bar{B})$	$p(A \cap B)$	$p(A \cup B)$
1e cas	0,2	0,4	0,8	0,6	0,08	0,52
2e cas	0,3	0,2	0,7	0,8	0,06	0,44

b. Les événements A et B sont incompatibles

	$p(A)$	$p(B)$	$p(\bar{A})$	$p(\bar{B})$	$p(A \cap B)$	$p(A \cup B)$
1e cas	0,2	0,4	0,8	0,6	0	0,6
2e cas	0,3	0,35	0,7	0,65	0	0,65

Exercice 2

1.

N° case	1	2	3	4	5	6	7	8
Nbre de grains	1	2	4	8	16	32	64	128

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^{n-1}$
   a. $u_1 = 1;\ u_2 = 2;\ u_3 = 4;\ u_4 = 8$
   b. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$; (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$
   c. $u_{64} = 2^{64-1} = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$
   Résultat élève : $9{,}223\,372\,037 \times 10^{18}$
3. On pose :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$$

   a. $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$
   b. $S_7(= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6)$ ou bien la somme des grains des 7 premières case de l'échiquier
   +
   $S_{64}(= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{64})$ ou bien la somme des grains des 64 cases de l'échiquier
4. $S_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$
   Résultat élève : $1{,}844\,674\,407 \times 10^{19}$
5. Production en tonnes à payer à l'inventeur : 922 337 203 685, 477 580 75 tonnes
   $0{,}05$ g $= 5 \times 10^{-8}\ t$

Problème

Partie A

1. $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
2. $(x+1)^2 > 0$. L'inverse d'un nombre positif étant positif, dont $g'(x) > 0$ sur $]-1; +\infty[$
3.
   a. $g(0) = 0$
   b. g étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$x \geq 0 \Longrightarrow g(x) \geq g(0) = 0$$

Autre manière : g est un quotient de terme positif.

Partie B

1. Etude de limites aux bornes
   a. En 0 :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

   Interprétation : l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe (C)

   b. En $+\infty$:

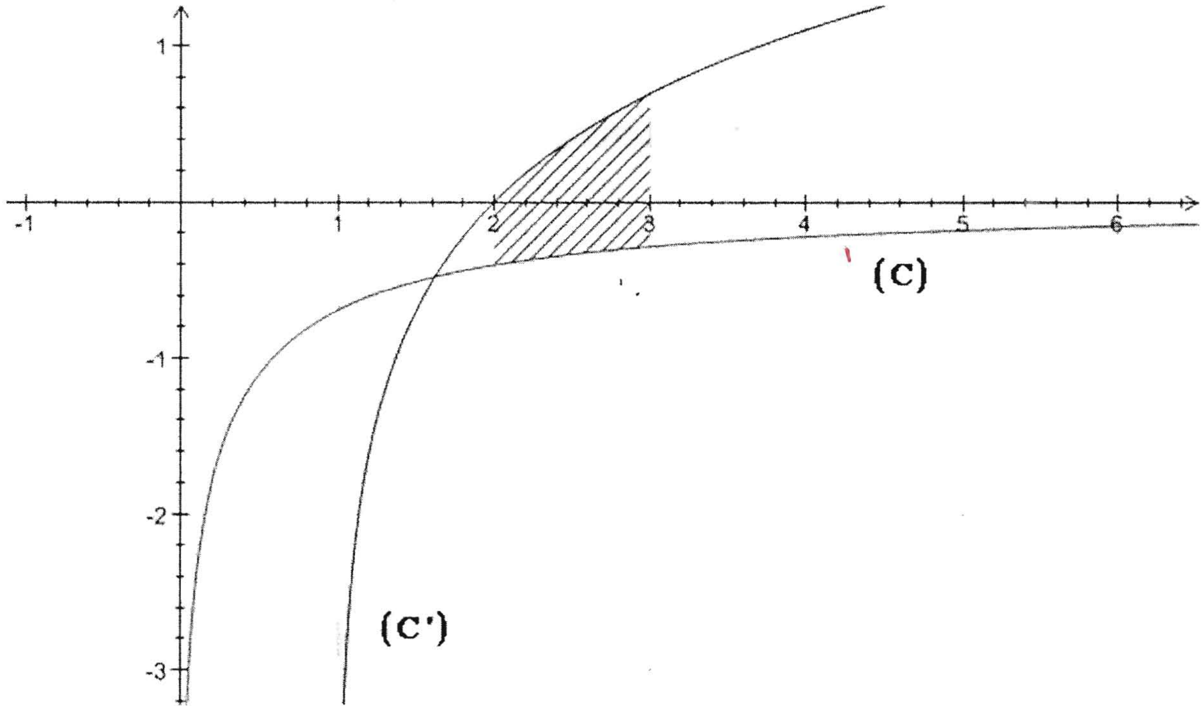
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

   Interprétation : l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe (C)

2. Dérivée et variation.
   a. $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$
   b. Produit de terme positif, puis inverse d'un terme positif : $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$
   c. Tableau de variation.

x	0		$+\infty$
x		$+$	
$x+1$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0

3. Courbe. (le tracé de (C') n'est pas demandé)



4. $h(x) = \ln(x-1)$
   a. $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\cancel{-}1-\sqrt{5}}{2}$ ou bien $x = \frac{\cancel{-}1+\sqrt{5}}{2}$
   b. $f(x) = h(x) \Longrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x}{x+1} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{x-x^2+1}{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\cancel{-}1+\sqrt{5}}{2}$

c. $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - x^2 + 1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]1; \frac{\cancel{-}1+\sqrt{5}}{2}\right]$

(C) est au dessus de (C') sur $\left]1; \frac{\cancel{-}1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et au dessous de (C') sur $\left]\frac{\cancel{-}1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

Partie C

1. Primitives

a. $F'(x) = \ln x + 1 - \ln(x+1) - 1 = \ln x - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = f(x)$

b. $H'(x) = \ln(x-1) + 1 - 1 = \ln(x-1) = h(x)$

2.

Calcul de l'intégrale :

$$\int_2^3 [h(x) - f(x)]dx = [H(x) - F(x)]_2^3 = [H(3) - F(3)] - [H(2) - F(2)]$$

$$[H(3) - F(3)] - [H(2) - F(2)] = 2\ln 2 - 3 - 3\ln 3 + 4\ln 4 + 2 + 2\ln 2 - 3\ln 3$$

$$\int_2^3 [h(x) - f(x)]dx = \overset{6}{\cancel{5}}\ln 4 - 6\ln 3 - 1$$

$= 12\ln 2 - 6\ln 3 - 1$
$\simeq 0,726$
0,25 pour le TV

Grille de correction

Exercice 1 (5 points)

1.	Question de cours		$0,25 \times 4$	1
2.	a.	1^e cas	$0,25 \times 4$	1
		2^e cas	$0,25 \times 4$	1
	b.	1^e cas	$0,25 \times 4$	1
		2^e cas	$0,25 \times 4$	1

Exercice 2 (5 points)

1.	Eléments du tableau		$0,25 \times 4$	1
2.	a.	Calcul exact des termes de la suite	$0,25 \times 4$	1
	b.	Démarche	0,25	0,5
		Valeur exacte de la raison	0,25	
	c.	Résultat élève : $9,223\,372\,037 \times 10^{18}$ Correct ou approximatif	0,5	0,5
3.	a.	Démarche	0,5	0,5
	b.	Tout résultat faisant référence à une somme de 7 premiers termes de la suite ou bien la somme des grains des 7 premières cases de l'échiquier	0,5	0,5
		Tout résultat faisant référence à une somme de 64 termes de la suite ou bien la somme des grains des 64 cases de l'échiquier	0,5	0,5
4.	Résultat élève : $1,844\,674\,407 \times 10^{19}$		0,5	0,5
5.	Question annulée (Bonus pour l'élève qui s'y aventure		**0,5**	

Problème (10 points)

Partie A (2 points)

1.	Démarche		0,25	0,5
	Résultat correct		0,25	
2.	Démarche		0,5	0,5
3.	a.	Résultat exact	0,5	0,5

	b.	g comme quotient de terme positif	0,25	0,5
		En utilisant la monotonie de g sur $]0; +\infty[$	0,25	

Partie B (6,5 points)

1.	a.	Démarche (mise en évidence de limites de références)	0,25	0,75
		Résultat correct	0,25	
		Bonne interprétation	0,25	
	b.	Démarche	0,25	0,75
		Résultat correct	0,25	
		Bonne interprétation	0,25	
2.	a.	Démarche (mise en évidence des formules de dérivation)	0,25	0,5
		Résultat correct	0,5	
	b.	Démarche	0,5	0,5
	c.	Tableau de variation avec les limites le tout conforme au travail attendu	0,5	0,5
		Tableau de variation conforme sans limites ou bien avec des résultats de limites faux	0,25	
3.	Tracé de la courbe		0,75	0,75
4.	a.	Démarche de résolution	0,25	0,75
		Résultats corrects	$0,25 \times 2$	
	b.	Démarche menant à la résolution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$	0,25	0,75
		Coordonnées de A	$0,25 \times 2$	
	c.	Démarche	0,25	0,75
	d.	Bonnes positions relatives	$0,25 \times 2$	

Partie C (1,5 points)

1.	a.	Démarche	0,25	0,5
		Résultat attendu	0,25	
	b.	Démarche	0,25	0,5
		Résultat attendu	0,25	
2.	Calcul exact ou approché		0,25	0,5
	Interprétation		0,25	

0,5 pour la présentation