BAC C R.C.I. session 87

EXERCICE I

(3 points)

1°) Les entiers naturels $\overline{34}$, $\overline{13}$, $\overline{1102}$ sont écrits dans la base a, a étant un entier naturel supérieur ou égal à 5.

Trouver a sachant que $\overline{34} \times \overline{13} = \overline{1102}$.

2°) Soit n un entier naturel s'écrivant $\overline{4p32}$ dans la base cinq, avec p entier naturel inférieur ou égal à 4.

a) Déterminer p pour que n soit divisible par 2.
b) Déterminer p pour que n soit divisible par 4.
c) Déterminer p pour que n soit divisible par 3.
d) n peut-il être divisible par 6?

EXERCICE II

(4 points)

On considère l'équation (E) d'inconnue z appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

(E) $\quad z^3 + 2iz^2 + iz + 1 + 3i = 0$

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure, puis résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On désigne par z_0, z_1 et z_2 les trois solutions de (E), les notations étant choisies de manière que ;

$$\mathcal{Re}(z_0) < \mathcal{Re}(z_1) < \mathcal{Re}(z_2).$$

où $\mathcal{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z.

2°) Dans le plan complexe de repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

a) Montrer que $M_0M_1M_2$ est un triangle rectangle isocèle.

b) Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui applique M_0, M_1 et M_2 respectivement sur les points d'affixes 0, i et 1. Déterminer le rapport et le centre de S ainsi qu'une mesure de son angle à 0,1 degré près.

PROBLEME

(12 points)

Partie A:

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les courbes (C) et (H) d'équations suivantes :

(C) : $\quad x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$

(H) : $\quad x^2 - y^2 - 3x + 2 = 0$

1°) Déterminer la nature des courbes (C) et (H). Tracer avec soin les courbes (C) et (H) sur un même dessin (unité : 2 cm).

2°) Soit la fonction:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{|x^2 - 3x + 2|}$$

a) Montrer que la courbe représentative (C_g) de la fonction g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est une partie de (C) ∪ (H) que l'on précisera.

b) La courbe (C_g) admet-elle des asymptotes? Un axe de symétrie? Les préciser.

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(3 - x)$.

d) Représenter (C_g) sur le dessin précédent à l'aide d'une couleur différente.

Partie B

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \int_x^{x+1} g(t)\,dt$$

Sans chercher à exprimer autrement f(x), on se propose d'obtenir l'allure de la courbe représentative (C_f) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les questions 1°), 2°), 3°) et 4°) sont indépendantes, et on en fait la synthèse au 5°).

1°) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier le sens de variation de f. (On démontrera que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x+1) - g(x)$ et, pour calculer le minimum de la fonction f, on notera que la valeur de ce minimum est l'aire d'une partie remarquable du plan.

2°) Etude de f(x) pour les "grandes valeurs" de x.

a) Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[2, +\infty[$. Comparer pour t appartenant à $[a, a+1]$, les nombres g(a), g(a+1) et g(t).

En déduire que $g(a) < f(a) < g(a+1)$.

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Soit la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Déterminer le signe de u(x) pour x appartenant à $[2, +\infty[$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire le signe de $\int_x^{x+1} u(t)\,dt$ pour x appartenant à $[2, +\infty[$,

et $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} u(t)\,dt$.

c) Pour tout nombre réel x, exprimer f(x) à l'aide de la fonction u.

En déduire une écriture de f(x) de la forme :

$f(x) = ax + b + \varphi(x)$ où a et b sont des nombres réels et φ une fonction numérique telle que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

d) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C_f) et préciser la position, par rapport à la droite (Δ), de la partie de (C_f) située dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathcal{P} ; x > 2\}$.

3°) Déterminer la fonction dérivée de la fonction

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) - f(2 - x)$$

Calculer h(1). En déduire que (C_f) admet un axe de symétrie que l'on déterminera.

4°) Estimation de f(2).

a) Soit & l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) telles que :

$2 < x < 3$ et $0 < y < g(2)$. On note s(&) l'aire du domaine &. Démontrer que s(&) = f(2).

b) A partir du dessin sur papier millimétré de la courbe (C_f), donner sans calcul une estimation de s(&) en mm^2 puis en unités d'aire, l'unité d'aire étant celle d'un carré de 2 cm de côté. En déduire une valeur approchée de f(2).

5°) Donner l'allure de la courbe (C_f) (Sur une autre feuille que celle utilisée pour (C) et (H)).