BAC C R.C.I. session 90

EXERCICE I

(4 points)

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère un triangle quelconque ABC. Soit C' le symétrique de B par rapport à A. Soit f l'application affine de $(\mathcal{P})$ définie par f(A) = A, f(B) = C et f(C) = C'.

1°) f est-elle une transformation affine de $(\mathcal{P})$? Justifier votre réponse.

2°) Soit M un point quelconque de $(\mathcal{P})$, Q le projeté de M sur la droite (AB) parallèlement à (AC), R le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à la droite (AB).

a) Démontrer que l'image Q' de Q par f est telle que (QQ') et (BC) sont deux droites parallèles.
b) Préciser la position du point Q'. Construire Q'.
c) Déterminer l'image de la droite (MQ) par f.
d) Déterminer l'image R' de R par f; construire R'.
e) Déterminer l'image de la droite (MR) par f.
f) Donner un programme de construction de l'image M' de M par f. Réaliser ce programme sur une figure.

3°) a) Préciser l'image C_1 de C' par f.
b) Préciser la nature et les caractéristiques de l'application f o f.
c) Trouver la nature du triangle ABC pour que f soit une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE II

(4 points)

Soit (E) l'équation donnée par: $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - (2+9i)z^2 + (-22+12i)z + 18 + 12i = 0$$

1°) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure.
b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$

2°) Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B et C les points dont les affixes sont les solutions de (E).
a) Placer ces points.
b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

PROBLEME

(12 points)

Dans tout le problème, $(\mathcal{P})$ est un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

Partie A:

Soit f la fonction définie par:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1+x} - \ln|1+x|$$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans $(\mathcal{P})$.

1°) a) Donner l'ensemble de définition D_f de f et les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Dresser le tableau des variations de f.

2°) Montrer que (C_f) coupe la droite des abscisses en deux points dont l'un a une abscisse non nulle notée α appartenant à l'intervalle $]-4{,}6; -4{,}5[$.

Note: On donne $1{,}25 < \ln 3{,}5 < 1{,}26$ et $1{,}28 < \ln 3{,}6 < 1{,}29$

Partie B

Pour tout élément m de $\mathbb{R}^*$ on définit les points I_m et J_m de $(\mathcal{P})$ par

$$\overline{OI_m} = \frac{1}{m}\overline{OI} \quad \text{et } \overline{OJ_m} = m\,\overline{OJ}$$

1°) Soit h_m la transformation affine de $(\mathcal{P})$ définie par:

$$h_m(O) = O,\ h_m(I) = I_m \text{ et } h_m(J) = J_m.$$

a) Définir analytiquement h_m dans le repère (O, I, J)
b) Donner un procédé de construction de l'image M_2 d'un point quelconque M par h_m.

2°) On pose $D_m = \mathbb{R}^* - \{-\frac{1}{m}\}$ et on considère la fonction g_m définie par:

$$\begin{cases} g_m(0) = m \\ \forall x \in D_m, \quad g_m(x) = \dfrac{\ln|1+mx|}{x} \end{cases}$$

On désigne par (Γ_m) la courbe représentative de g_m dans $(\mathcal{P})$.

a) Quelle transformation géométrique simple tansforme (Γ_m) en (Γ_{-m})?
b) h_m étant l'application affine définie en B 1°), démontrer que, pour tout m élément de $\mathbb{R}^*$, (Γ_m) est l'image de (Γ_1) par h_m.

3°) a) Montrer que g_1 est continue et dérivable en tout point de $D_1 - \{0\}$.
b) On admet qu'il existe une fonction numérique ε de la variable réelle x telle que:

$$\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Montrer alors que g_1 est continue et dérivable en 0.
c) Etudier les branches infinies de (Γ_1).
d) Utiliser A pour étudier les variations de g_1.
e) Construire (Γ_1), (Γ_2) et (Γ_{-2}) sur une même figure.