



DEVOIR DE MATHS 4

EXERCICE I (5 points) fig 0,5 pts

1°) Soit ABC un triangle non isocèle en A. On note d la bissectrice intérieure de l'angle Â et d' sa bissectrice extérieure.
Soit M un point du plan distinct de A. Montrer que M est un point de d ou de d' si et seulement si :

$$1 \quad \left(\vec{AB}; \vec{AM} \right) = \left(\vec{AM}; \vec{AC} \right) + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2°) Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les points d'intersection de la médiatrice de [BC] avec Γ appartient aux bissectrices d et d'.

3°) On pose AB = c, AC = b, BC = a.

- Soit I barycentre de (B, b), (C, c)
- J barycentre de (A, c), (B, b)
- K barycentre de (A, b), (C, c)
- H barycentre de (A, b+c), (B, b), (C, c)

- a) Montrer que H est le milieu commun des segments [AI] et [JK].
- b) Calculer en fonction de b et c les distances AJ et AK. En déduire que le quadrilatère AJIK est un losange.

EXERCICE II (4 points)

On considère l'équation :
(E) $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad 19x + 9y = 3$

- 1°) Montrer que si (x, y) est une solution de (E) alors x est un multiple de 3.
- 2°) Résoudre l'équation (E).
- 3°) Déterminer les couples (x, y) solutions de l'équation (E) tels que le PGCD de x et y soit maximum.

PROBLEME (11 points)

Partie A:

1°) On considère la fonction f_n définie sur IR par :
 $f_n(x) = (1-x)^n e^x, \quad n \in \mathbb{N}^*$

Etudier les variations de f_n pour n pair et puis pour n impair. Déterminer les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

Présenter les résultats dans deux tableaux.

- 2°) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f_n . 0,15
- b) On donne le tableau suivant :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f_3(x)$	1	0,8057	0,6254	0,4630	0,3222	0,2061
x	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
$f_3(x)$	0,1166	0,0544	0,0178	0,0025	0	

Construire sur $[0; 1]$, la courbe (C_3) représentative de f_3 dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 10 cm. 1,15

c) En appliquant la méthode des rectangles aux intervalles $\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10} \right], 0 \leq k \leq 9$, montrer que :

$$\frac{1}{10} [f_3(0,1) + f_3(0,2) + \dots + f_3(1)] \leq \int_0^1 f_3(x) dx \leq \frac{1}{10} [f_3(0) + f_3(0,1) + \dots + f_3(0,9)] \quad 0,175$$

En déduire un encadrement de $\int_0^1 f_3(x) dx$ 0,125

Partie B: 4,15

Soit F_p la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $F_p(x) = \int_0^x (1-t)^{2p+1} e^t dt, p \in \mathbb{N}$.

1°) Montrer que pour tout réel $t \geq 1$, on a : $e^t (1-t)^{2p+1} \leq (1-t)^{2p+1}$ 0,125

En déduire les limites de $F_p(x)$ et de $\frac{1}{x} F_p(x)$ quand x tend vers $+\infty$. 1

2°) Montrer que pour tout réel t de $[0; 1]$, on a :
 $(1-t)^{2p+1} \leq e^t (1-t)^{2p+1} \leq e(1-t)^{2p+1}$. 0,125

En déduire un encadrement de $F_p(1)$ et ensuite de $F_1(1)$. 0,15 + 0,125

3°) a) Calculer $F'_p(x)$ et dresser le tableau de variations de F_p . 0,175

b) Montrer qu'il existe un réel α_p unique, tel que $\alpha_p \geq 1$ et $F_p(\alpha_p) = 0$. 0,15

4°) Donner l'allure de la courbe représentative de F_1 définie sur \mathbb{R}^+ dans un nouveau repère orthonormal d'unité graphique 2 cm. On prendra $F_1(1) = 0,3$ et $\alpha_1 = 1,7$. 0,175

Partie C:

1°) Soit $(u_n), n \geq 1$, la suite définie par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

a) Montrer que cette suite est positive. 0,125

b) Montrer que cette suite est décroissante. Est-elle convergente ? 0,15

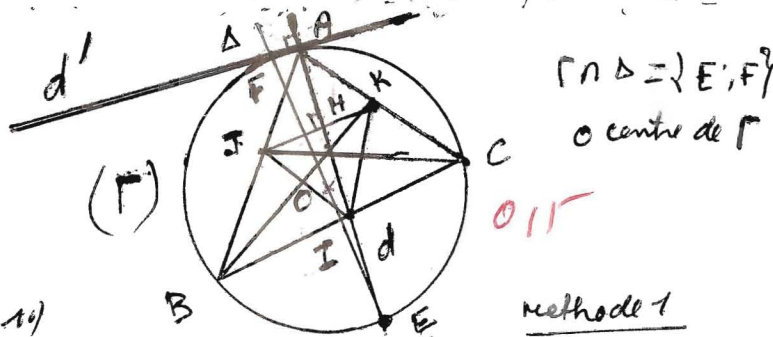
2°) Calculer la limite de cette suite. 0,175

Exercice I

A9 (5)

$$M \in d \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC}) [2\pi]$$

$$M \in d' \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC}) + \pi [2\pi]$$



1) $M \in d \cup d' \Leftrightarrow M \in d$ ou $M \in d'$
 $\Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC}) [2\pi]$ ou
 $(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC}) + \pi [2\pi]$
 $\Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ainsi $M \in d \cup d' \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC}) + k\pi$
 Methode 2 $k \in \mathbb{Z}$
 $(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AC}) + k\pi \Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AM}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{AC}) + k\pi$
 $\Leftrightarrow 2(\vec{AB}, \vec{AM}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + k\pi$
 $\Leftrightarrow (\vec{AB}, \vec{AM}) = \frac{1}{2}(\vec{AB}, \vec{AC}) + \frac{k\pi}{2}$
 $\Leftrightarrow M \in d \cup d'$

2° $E \in (\Delta) \cap (\Gamma) \Rightarrow EB = EC$ et $(\vec{AB}, \vec{AE}) = (\vec{CB}, \vec{CE}) [2\pi]$
 or $(\vec{CB}, \vec{CE}) = (\vec{AE}, \vec{AC})$ car $EB = EC$
 donc $(\vec{AB}, \vec{AE}) = (\vec{AE}, \vec{AC}) [2\pi]$ et $E \in d$
 O, E, F $\in (\Delta)$ mediatrice de [BC] donc [EF] est un diamètre de (Γ) et le triangle EFA est rectangle en A, or $(EA) = d$ donc $(AF) \perp d'$ et $(AF) = d'$ puis $F \in d'$
 Ainsi les points d'intersection de (Γ) et Δ sont sur d ou d' .

3° a) d'après le Theo des bary. Partiels on a:
 $H = \text{bar} \left(\frac{A}{b+c} \mid \frac{B}{b} \mid \frac{C}{c} \right) = \text{bar} \left(\frac{A}{b+c} \mid \frac{A}{b} \mid \frac{B}{c} \right) = \text{bar} \left(\frac{A}{b+c} \mid \frac{A}{b} \mid \frac{A}{c} \right)$
 $= \text{bar} \left(\frac{A}{b+c} \mid \frac{A}{b+c} \right)$ les coeff etant égaux
 H est le milieu de [AI] et [JK].
 b) $J = \text{bar} \left(\frac{A}{c} \mid \frac{B}{b} \right) \Rightarrow \vec{AJ} = \frac{b}{b+c} \vec{AB}$ et
 $\vec{AJ} = \frac{bc}{b+c} \vec{AB} = \frac{bc}{b+c} \vec{AC}$ car $AB = AC$
 $\vec{AK} = \frac{bc}{b+c} \vec{AC}$ et $AK = \frac{bc}{b+c} AC = b$
 car $AC = b$
 les diagonales [AI] et [JK] ont même milieu H et $AJ = AK$ donc AJIK est un losange.

Exercice II (4) (E) $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ $19x + 9y = 3$

1° soit un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E)
 on a: $19x + 9y = 3 \Leftrightarrow 19x = 3(1-3y)$
 donc 3 divise $19x$. D'après le Theo de Gauss
 3 divise x car 3 et 19 sont premiers entre eux, ainsi x est un multiple de 3.

2° Résolvons (E) $19x + 9y = 3$
 cherchons d'abord 1 sol. parti. de (E).
 19 et 9 sont premiers entre eux, or
 $19 - 18 = 19(1) + 9(-2) = 1$ et
 $19(3) + 9(-6) = 3$ et $(x, y) = (3, -6)$
 est une soluto. parti. de (E).
 $19x + 9y = 3 \Leftrightarrow 19x + 9y = 19(3) + 9(-6)$
 $\Leftrightarrow 19(x-3) = 9(-y+6)$
 19 divise $-y+6$, or 19 et 9 sont premiers entre eux, donc d'après le Theo de Gauss 19 divise $y+6$. Ainsi il existe k elt de \mathbb{Z} $y = -6 + 19k$
 on a alors $\begin{cases} 19(x-3) = 9(-y-6) \\ y = -6 + 19k \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 19(x-3) = 9(19k) \\ y = -6 + 19k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 9k \\ y = -6 + 19k \end{cases}$$

$S = \{ (3 + 9k, -6 + 19k), k \in \mathbb{Z} \}$
 3° $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a + kb, b), k \in \mathbb{Z}$
 $\text{pgcd}(3 - 9k, -6 + 19k) =$
 $= \text{pgcd}(3 - 9k, -6 + 19k + 6 - 18k)$
 $= \text{pgcd}(3 - 9k, k)$
 $= \text{pgcd}(3 - 9k + 9k, k)$
 $= \text{pgcd}(3, k)$ on a alors
 $\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(3, k) = 1$ ou 3 car 3 est un nombre premier e
 $\text{pgcd}(x, y)$ est maximum si $\text{pgcd}(3, k) = 3$
 Ainsi $\text{pgcd}(3, k) = 3 \Leftrightarrow k$ est un multiple de 3 et $k = 3k', k' \in \mathbb{Z}$
 $x = 3 - 27k'$ et $y = -6 + 57k'$
 $S' = \{ (3 - 27k', -6 + 57k'), k' \in \mathbb{Z} \}$
 pour que $\text{pgcd}(x, y) = 3$ on a $(x, y) \in S'$

Problème $f_m(x) = (1-x)^m e^x$

10) Variation de f_m . $n \in \mathbb{N}^*$
 f_m est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'_m(x) = (1-x)^{m-1} e^x (1-m-x)$ 0,25

• pour n pair, $n-1$ impair et $f'_m(x)$ est de signe de $(1-x)(1-m-x)$ car $e^x > 0$

x	$-\infty$	$1-m$	1	$+\infty$
$1-x$		+	+	0
$1-m-x$		+	0	-
		+	0	+

0,5

f_m est strict \nearrow sur $]-\infty; 1-m]$ et sur $[1; +\infty[$

f_m est strict \searrow sur $[1-m; 1]$ 0,25

• pour n impair, $n-1$ pair et f'_m est de signe $1-m-x$ car $e^x > 0$ et $(1-x)^{m-1} > 0$

x	$-\infty$	$1-m$	1	$+\infty$
$(1-x)^{m-1}$		+	+	0
$1-m-x$		+	0	-
		+	0	-

0,5

$f'_m \geq 0$ sur $]-\infty; 1-m]$ et $f'_m \leq 0$ sur $[1-m; +\infty[$
 f_m est strict \nearrow sur $]-\infty; 1-m]$ et f_m est strict \searrow sur $[1-m; +\infty[$ 0,25

Calcul de limites posons $x = 1-x$

quand $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow +\infty$
 $f_m(x) = (1-x)^m e^x = (1-x)^m e^{x-1} e = x e \cdot e$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ 0,25

La limite en $+\infty$ dépend de la parité de m .
 pour n pair $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x} = +\infty$ 0,25

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$
 pour n impair $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x} = -\infty$ 0,25

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

20) a- Tableau de variation de f_m

pour n pair: 0,25

x	$-\infty$	$1-m$	1	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	0	-	0
$f_m(x)$		\nearrow	\searrow	\nearrow

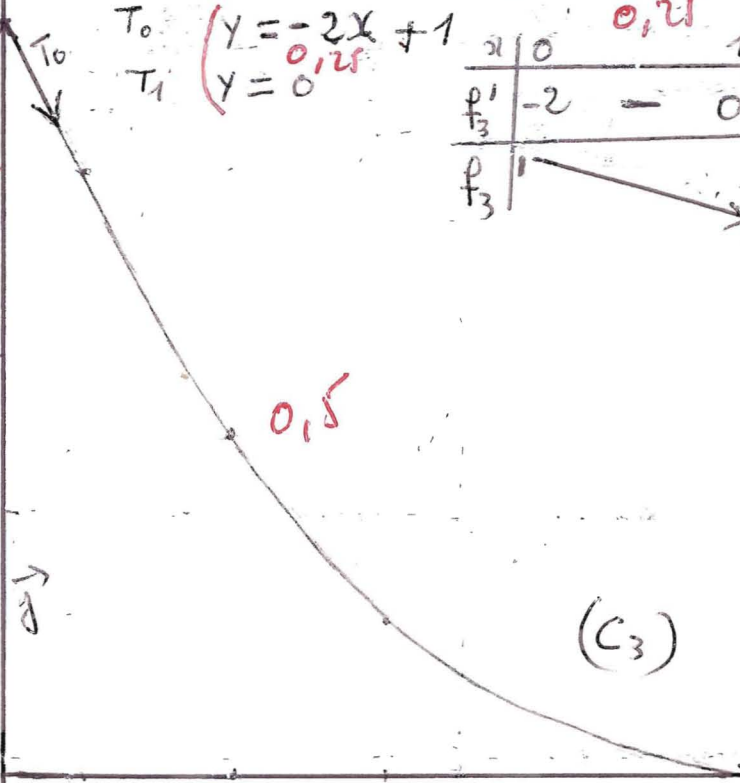
$M = f_m(1-m) = m^{m-1} e^{1-m}$; $m=0$

pour n impair: 0,25

x	$-\infty$	$1-m$	1	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	0	-	-
$f_m(x)$		\nearrow	\searrow	\searrow

b) Tracer de (C_3) sur $[0; 1]$

$T_0: y = -2x + 1$ 0,25
 $T_1: y = 0$ 0,25



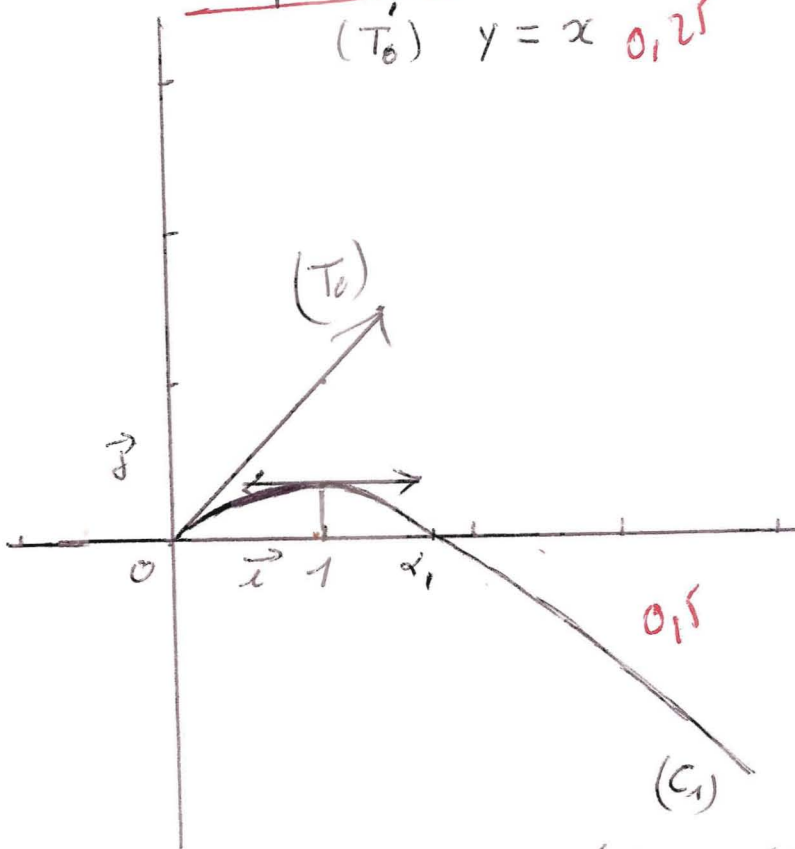
$Rg(T_0)$ et (T_1) sont les tangentes à (C_3) aux points d'abscisse 0 et 1.

c) f est strict \searrow sur $[0; 1]$ donc sur $[\frac{k}{10}; \frac{k+1}{10}] \subset [0; 1]$, $\forall k \text{ tq } 0 \leq k \leq 9$ 0,25

$\frac{k}{10} \leq x \leq \frac{k+1}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} f(\frac{k+1}{10}) \leq f(x) \leq \frac{1}{10} f(\frac{k}{10})$
 et $\frac{1}{10} f(\frac{k+1}{10}) \leq \int_{\frac{k}{10}}^{\frac{k+1}{10}} f(x) dx \leq \frac{1}{10} f(\frac{k}{10})$
 d'après Ineg. de l'atty. 0,25

or $0 \in]-\infty; F_p(1)]$ car $F_p(1) > 0$ donc l'équation $F_p(x) = 0$ admet une solution unique $x_p \in [1; +\infty[$.
Ainsi $F_p(x_p) = 0$ avec $x_p > 1$.

(T_0) $y = x$ 0,25



$Rq_0(T_0)$ est la tangente à (C_1) en $O(0,0)$

(C_1) admet une branche parabolique de direction $(0, \vec{j})$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F_p(x)}{x} = -\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F_p(x)}{x} = -\infty \right)$$

d'après 1, B.

Partie c 1,15

1°) $n > 1$ $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

a) $\forall t \in [0; 1]$ $0 < t < 1 \Rightarrow -1 \leq -t \leq 0$
donc $0 \leq 1-t \leq 1$ et $0 \leq (1-t)^n \leq 1$

Par suite $0 \leq (1-t)^n e^t \leq e^t$ et

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt > 0 \text{ ainsi la suite } (u_n) \text{ est positive.}$$

b) $Mq(u_n)_1$ est décroissante.
 $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 [(1-t)^{n+1} e^t - (1-t)^n e^t] dt$
 $= \int_0^1 (1-t)^n e^t (1-t-1) dt$
 $0,25 \quad = \int_0^1 (1-t)^n e^t (-t) dt \leq 0$ car

$0 < t < 1, -t < 0; (1-t)^n e^t > 0$
donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
La suite $(u_n)_n$ est decr. et minorée par zéro donc elle est convergente. 0,25

2°) calcul de la limite de u_n

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^t \leq e$ (car exp \rightarrow)
 $-1 \leq -t \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1-t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1-t)^n \leq 1$
et alors $(1-t)^n \leq (1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$
et $\int_0^1 (1-t)^n dt \leq \int_0^1 f_n(t) dt \leq e \int_0^1 (1-t)^n dt$
 $\left[\frac{-1}{n+1} (1-t)^{n+1} \right]_0^1 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1} \left[(1-t)^{n+1} \right]_0^1$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ par 0,25

encadrement.

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 f_3\left(\frac{k+1}{10}\right) \leq \sum_{k=0}^9 \int_{\frac{k}{10}}^{\frac{k+1}{10}} f(x) dx \leq \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 f_3\left(\frac{k}{10}\right)$$

car d'après la rel. de Chasles $\sum_{k=0}^9 \int_{\frac{k}{10}}^{\frac{k+1}{10}} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$

0,25

$$\frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 f_3\left(\frac{k+1}{10}\right) = \frac{1}{10} (f_3(0,1) + f_3(0,2) + \dots + f_3(1))$$

$$= \frac{2,6137}{10} = 0,26137$$

0,25

$$\frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 f_3\left(\frac{k}{10}\right) = \frac{1}{10} (f_3(0) + \dots + f_3(0,9))$$

$$= \frac{3,6137}{10} = 0,36137$$

d'où $0,26137 \leq \int_0^1 f_3(x) dx \leq 0,36137$

amplitude 10^{-1}

B $F_p(x) = \int_0^x (1-t)^{2p+1} e^t dt, x \in \mathbb{R}$

1° $\forall t > 1$ on a : $t > 1 \Rightarrow t > 0$ donc $e^t > e > 1$ car $t \mapsto e^t \nearrow$ sur \mathbb{R}

$2p+1$ impaire, $t > 1 \Rightarrow 1-t < 0$ et $(1-t)^{2p+1} < 0$

$e^t > 1 \Rightarrow e^t (1-t)^{2p+1} \leq (1-t)^{2p+1} \forall t > 1$

Par suite $\forall x > 1$ $\int_0^x e^t (1-t)^{2p+1} dt \leq \int_0^x (1-t)^{2p+1} dt$

0,25

$$\int_0^x (1-t)^{2p+1} dt = \left[\frac{-1}{2p+2} (1-t)^{2p+2} \right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{2p+2} \left((1-x)^{2p+2} - 1 \right)$$

0,25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2p+2} \left((1-x)^{2p+2} - 1 \right) = -\infty$$

car $2p+2$ paire, $-\frac{1}{2p+2} < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)^{2p+2} = +\infty$

d'où $F_p(x) \leq -\frac{1}{2p+2} \left((1-x)^{2p+2} - 1 \right)$

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_p(x) = -\infty$ par comparaison.

0,25

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} F_p(x) \leq -\frac{1}{2p+2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left((1-x)^{2p+2} - 1 \right)$$

$$\leq -\frac{1}{2p+2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\left[x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{2p+2} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{x} F_p(x) \leq -\frac{1}{2p+2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{2p+2} - 1 \right)$$

$$F_p(x) \leq -\frac{1}{2p+2} \left(x^{2p+1} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{2p+2} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2p+2} \left(x^{2p+1} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{2p+2} - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{2p+2} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p+1} = +\infty$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} F_p(x) = -\infty$ par comp. 0,25

La courbe (C_p) de F_p admet 1 branche parabolique de direction $(0, \vec{j})$.

2° $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^t \leq e$ car exp \nearrow

$1-t \geq 0 \Rightarrow (1-t)^{2p+1} \geq 0 \forall t \in [0,1]$ donc

$1 \leq e^t \leq e \Rightarrow (1-t)^{2p+1} \leq (1-t)^{2p+1} e^t \leq e(1-t)^{2p+1}$

$\Rightarrow \int_0^x (1-t)^{2p+1} dt \leq F_p(x) \leq \int_0^x e(1-t)^{2p+1} dt$

$\Rightarrow -\frac{1}{2p+2} \left[(1-x)^{2p+2} - 1 \right] \leq F_p(x) \leq -\frac{e}{2p+2} \left[(1-x)^{2p+2} - 1 \right]$

$\forall x \in [0,1]$

Ainsi

$$\frac{1}{2p+2} \leq F_p(x) \leq \frac{e}{2p+2} \text{ et } \frac{1}{4} \leq F_1(x) \leq \frac{e}{4}$$

0,25

Ensuite $0,27 \leq F_1(x) \leq 0,68$

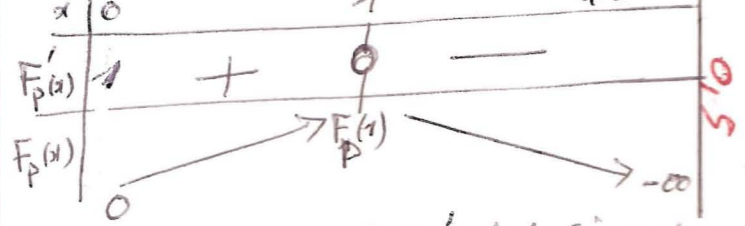
encadrement d'amplitude $0,43$

L'encadrement obtenu en $\mathbb{A} 2c$ est meilleur car d'amplitude $10^{-1} < 0,43$

3° a - F_p est la primitive de f_p qui s'annule en 0 donc $F_p'(x) = f_p(x)$

$\forall x > 0$ $F_p'(x) = (1-x)^{2p+1} e^x$

$2p+1$ impaire.



\mathbb{R}_q $2p+1$ impaire et F_p' est de signe \pm sur $1-x$.

b) $0,27 \leq F_1(x) \leq 0,68$ donc $F_1(x) > 0$

F_p est dér. et st \nearrow sur $[0,1]$ et $F_p([0,1]) = [0, F_1(1)]$ et 0 est l'unique solution sur $[0,1]$ de $F_p(x) = 0$

F_p est dér. et st \searrow sur $[1, +\infty[$ et $F_p([1, +\infty[) =]-\infty; F(1)]$, donc F_p a 1 bij de $[1, +\infty[$ sur $]-\infty; F(1)[$.