BERENGER B. TC

BAC C R.C.I. session 94

EXERCICE I

On considère l'équation (E) :

$z^3 - (5+3i)z^2 + (6+11i)z - 10i = 0$, où z désigne un nombre complexe.

1°) a) Démontrer que (E) admet une unique solution réelle z_1.

b) Résoudre l'équation (E). On notera z_2 la solution de (E) telle que $\mathcal{Re}(z_2) = z_1$ et z_3 la troisième solution.

2°) Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J), on appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Déterminer le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, − 2) et (C, 1).

b) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de S.

c) Calculer l'affixe du point C', image de C par S.

d) Sans aucun calcul, démontrer que le barycentre des points pondérés (B, 2), (C, − 2) et (C', 1) est le point I

EXERCICE II

1°) a) Soit deux nombres réels naturels p et q tels que $p > q$. Démontrer que $p + q$ et $p - q$ sont de même parité.

b) En déduire que $p^2 - q^2$ est soit impair, soit multiple de 4.

2°) Soit n un nombre entier naturel.

a) On suppose que n est impair. Démontrer qu'il existe deux nombres entiers naturels consécutifs p et q tels que ; $n = p^2 - q^2$.

b) On suppose que n est multiple de 4. Démontrer qu'il existe deux nombres entiers naturels p et q tels que : $n = p^2 - q^2$.

3°) Déduire des questions 1°) et 2°) une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier naturel soit la différence des carrés de deux nombres entiers naturels.

PROBLEME

L'objet du problème est de démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = e$$

en utilisant le calcul intégral.

Partie A:

1°) Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2°) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_o = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dots+\dfrac{1}{n!} \end{cases}$$

a) Déduire du 1°) que la suite u est majorée par 3.

b) Démontrer que la suite u est convergente, sans chercher à calculer sa limite.

Partie B:

On considère la fonction f_o de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f_o(x) = e^{-x}$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f_n(x) = x^n e^{-x}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 4 cm), on désigne par (C_o) et (C_n) les représentations graphiques respectives de f_o et f_n.

1°) Etudier les variations de f_0 et f_1. Préciser la position de (C_o) par rapport à (C_1). Construire les courbes (C_o) et (C_1) sur une même figure (prendre $e = 2{,}7$ et $e^{-1} = 0{,}37$).

2°) Etudier les variations de f_n pour $n \geq 2$, en distinguant deux cas suivant la parité de n.

3°) Construire les courbes (C_2) et (C_3) sur une autre figure que la figure du 1°).

Partie C:

Pour tout nombre entier naturel n, on considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$

1°) Calculer $F_o(x)$ et $F_1(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+$. Calculer ensuite $\lim_{x\to+\infty} F_o(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F_1(x)$.

2°) Démontrer que:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F_n(x) = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x)$.

Partie D.

Le but de cette dernière partie est de calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie A.

1°) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} u_n.$$

2°) a) Démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,1] \quad 0 \leq f_n(t) \leq e^{-1}$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq F_n(1) \leq e^{-1}$.

3°) Déduire des résultats des questions précédentes la limite lorsque n tend vers l'infini de :

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}$$