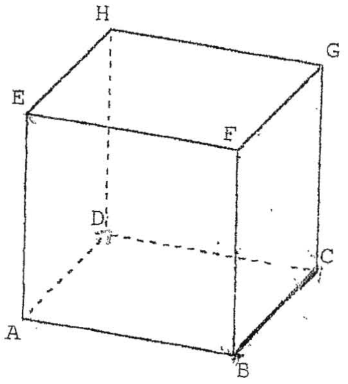
40 copies

REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2003- 1 MATHEMATIQUES
SERIE : C-E
Durée : 4 heures
Coef : 5

Exercice1 (5 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on considère le cube de sommets A, B, C, D, E, F, G , H. dont une représentation est jointe .
On considère I le milieu de l'arête [BF] et J le point défini par : $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.



1°) a) Préciser les coordonnées des points I et J.
b) Démontrer que les points A, I, J définissent un plan (P) dont on déterminera une équation cartésienne.

2) a) Calculer le volume du tétraèdre AIJE.
b) Calculer l'aire du triangle AIJ et en déduire la distance du point E au plan (P).

3°) Soit (Q) le plan d'équation : $3x - 3y + 6z - 8 = 0$.
a) Démontrer que (P) et (Q) sont sécants.
b) Déterminer une représentation paramétrique de (Δ) intersection de (P) et (Q) et vérifier que (Δ) passe par le point de coordonnées $(1,\frac{1}{3},1)$.

4°). Soit O le centre de la face CGFB.
Déterminer géométriquement l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB}$. (on pourra utiliser le point O).

Exercice2 (4points)

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard une boule de l'urne, on lit le numéro noté a, puis on remet la boule tirée dans l'urne. On tire ensuite une deuxième boule de l'urne et on note b le numéro de la boule tirée .
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On considère les vecteurs $\vec{u}$, et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a ; 1) et (ab – b + 6 ; b+1).(a et b sont les réels définis ci-dessus).

1°) Démontrer que la probabilité que ces vecteurs soient colinéaires est égale à $\frac{1}{5}$.

2°) Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie chaque joueur effectue le tirage de deux boules tel que décrit dans la 1ère question.
Si A obtient des vecteurs colinéaires et B des vecteurs non colinéaires, A est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
Si A obtient des vecteurs non colinéaires et B des vecteurs colinéaires, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
Dans les autres cas les joueurs entreprennent une nouvelle partie : le jeu continue.
Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par :

A_n : « A gagne la $n^{ième}$ partie ».

B_n : « B gagne la $n^{ième}$ partie » .

C_n : « le jeu continue après la $n^{ième}$ partie ».

a) Calculer les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$ des évènements A_1, B_1 et C_1.

b) Etant donné que : $C_{n+1} \subset C_n$, $A_{n+1} \subset C_n$ et $B_{n+1} \subset C_n$,
déterminer alors $C_{n+1} \cap C_n$, $A_{n+1} \cap C_n$ et $B_{n+1} \cap C_n$.

c) Donner $P(C_{n+1} / C_n)$, $P(A_{n+1}/ C_n)$ et $P(B_{n+1} /C_n)$. Exprimer $P(C_{n+1})$, $P(B_{n+1})$, $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$. En déduire que $P(C_n) = (\frac{17}{25})^n$.

d) En déduire que $P(C_n) = (\frac{17}{25})^n$, $P(B_n) = P(A_n) = \frac{4}{25}(\frac{17}{25})^{n-1}$.

e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(A_n) \leq 0.01$

Problème (11 points)

Dans ce problème n est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} & pour\ x \neq -1 \\ f_n(-1) = 0 \end{cases}$.

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm, et on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Pour tout entier naturel n différent de zéro ,on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g_n(x) = (-2n+x+1)e^{x+1} + 2n$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

b) Donner le sens de variation de g_n puis dresser son tableau de variation.

2°) a) Calculer $g_n(-1)$ et en déduire que : $2n - e^{2n-1} < 0$ pour tout n différent de zéro.

b) Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle]2n - 2; +∞[.

c) Démonter que α_n appartient à l'intervalle] 2n - 2; 2n - 1[puis en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est croissante.

3°) a)Déterminer le signe de g_n suivant les valeurs de x.

b) Déterminer les coordonnées du point M_n où la courbe représentative de la fonction g_n admet un extremum et en déduire que le point M_n appartient à une courbe dont on donnera une équation.

Partie B : Etude des fonctions f_n pour n différent de zéro et représentation de (C_1) et de (C_2)

1°) a) Etudier la continuité de f_n en -1.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en –1 (on distinguera deux cas n = 1 et n > 1).

2°) a) Calculer les limites de f_n en -∞ et en +∞.

b) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que pour tout réel x différent de –1.

$$f'_n(x) = \frac{(x+1)^{2n-1}}{(1-e^{x+1})^2} \times g_n(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1-e^{x+1}}\right]^2 \times (x+1)g_n(x).$$

c) Donner le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation pour n > 1.

3°) a) Démontrer que les courbes (C_2) et (C_3) ont trois points communs A, B et C que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives des courbes (C_2) et (C_3), puis les construire sur un même graphique.

artie C : Etude d'une suite.

est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

oit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p - 2; 2p - 1]$; par :

$$h_p(x) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}}.$$

n considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2p - 2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier n.}$$

1°) Démonter que pour tout x de I_p les équations $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.

2°) a) En utilisant la partie A, 2°) a) montrer que pour tout $x \in I_p$, on a :

$h_p(x) \in I_p$ et $\left|h'_p(x)\right| \leq \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1$

3°) On pose : $k_p = \frac{2p}{e^{2p-1}}$

a) Démontrer que pour tout n, $u_n \in I_p$.

b) Démontrer que pour tout n, $\left|u_{n+1} - \alpha_p\right| \leq k_p\left|u_n - \alpha_p\right|$, puis en déduire $\left|u_n - \alpha_p\right| \leq k_p^{\,n}$ et que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Partie D Convergence d'une suite.

On pose : $v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx$ pour n entier naturel non nul.

1°) a) Justifier l'existence de (v_n).

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq 0$.

c) Montrer que (v_n). est croissante, que peut-on en déduire ?

2°) a) En utilisant les variations de f_n sur l'intervalle [-1 ; 0], montrer que : $\frac{1}{1-e} \leq f(x)_n \leq 0$.

b) En déduire que $\frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$, calculer la limite de (v_n).

N.B. La partie D est indépendante de la partie C.