

Exercice 1 : (5 points)

On considère le fonction f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n!} e^x$. (n entier naturel non nul).

1°) Montrer que si : $0 \leq x \leq 1$ on a, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$.

2°) Soit $I_n = \int_{1-x}^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ pour $0 \leq x \leq 1$

- a) A l'aide d'une intégration par parties calculer I_1 .
- b) En intégrant par parties I_{n+1} vérifier la relation de récurrence :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-x}.$$

- c) Démontrer alors que pour tout entier n non nul,

$$I_n = e - e^{1-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

- d) En utilisant 1°) déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$; en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$.

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour n entier non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \dots + \frac{1}{2^n \times n!}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{3 \times 1!} + \frac{1}{3^2 \times 2!} + \dots + \frac{1}{3^n \times n!}$$

Déterminer $\lim_n u_n$, puis $\lim_n v_n$.

Exercice 2 (4 points)

1°) a) Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide le PGCD de 6092 et 135.

b) Que peut-on conclure pour les nombres 6092 et 135 ?

2°) Soit l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $6092x + 135y = 1$

Démontrer que tout couple $(x ; y)$ solution de (E) est tel que x et y soient premiers entre eux.

3°) Utiliser l'algorithme d'Euclide de la question 1°)a pour déterminer une solution particulière de (E).

4°) a) Résoudre alors l'équation (E).

- b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E') : $6092x + 135y = 45$ après avoir montré que si $(x ; y)$ est solution de (E') alors x est multiple de 45.
 5°) Quel est le reste dans la division par 7 de 6092^{135} ?

Problème (11 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

Partie 1

(d_1) est la droite passant par le point $J(0 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 1)$.

(d_2) est l'axe (oy) . s_1 est la symétrie orthogonale d'axe (d_1) et s_2 la symétrie orthogonale d'axe (d_2) .

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $r = s_2 \circ s_1$.

2°) (d_3) est la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{v}(1 ; 4)$, s_3 est la symétrie orthogonale d'axe (d_3) .

- a) Soit $M(x ; y)$ un point du plan et on pose $M'(x' ; y') = s_3(M)$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 3.
 c) Démontrer l'existence d'une unique symétrie orthogonale s_4 , telle que $s_4 \circ s_3 = s_2 \circ s_1$. Donner alors l'équation cartésienne de son axe.

Partie 2

Soient les points $A(5 ; 0)$, $B(4 ; 1)$, $A'(-3 ; 2)$, $B'(-4 ; 1)$ et $W(0 ; -3)$.

1°) Démontrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

2°) R est la rotation de centre A et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur \vec{AA}' .

a) Montrer que $f = T \circ R$

b) Soit $B_1 = R(B)$. Quelle est la nature du quadrilatère $AA'B_1B'$.

3°) Soit I le milieu du segment $[AA']$, démontrer que :

$$(\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}; \quad (\vec{IB}, \vec{IO}) = -\frac{3}{4}\pi \pmod{2\pi}; \quad (\vec{WB}, \vec{WO}) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}.$$

Montrer que ces angles sont égaux modulo π . Que peut-on dire alors des points O, I, A, B et W ?

4°) a) Déterminer (\mathcal{E}) , l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$|(1-i)z + 6i| = 2\sqrt{2}$$

b) Soit g la transformation de (\mathcal{P}) qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1-i)z + 6i$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g .

c) Déterminer K l'antécédent de O par g . En utilisant g retrouver l'ensemble (\mathcal{E}) .

d) Soit (Γ) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 4\sin^2 t \\ y(t) = 2\sin 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}. M(t) \text{ est le point de coordonnées } (x(t); y(t))$$

Comparer $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$, puis $M(t)$ et $M(-t)$. Que peut-on en conclure ?

e) Étudier les variations de : $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $[0; \pi]$.

f) Tracer la courbe (Γ) , démontrer que c'est un cercle de centre O .

Montrer que l'image de (\mathcal{E}) par f est (Γ) .

SERIE C et E

Exercice 1 (5 points)

Soit $f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n!} e^x$

1°) **Encadrement de f_n sur $I = [0 ; 1]$** $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$

encadrement direct des fonctions : $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto e^x$ qui sont croissantes sur I 0,5

2°) a) **Calcul de I_1 par parties** : on pose $u(t) = (1-t)$ et $v'(t) = e^t$ et on trouve

$$I_1 = e - (1+x)e^{1-x} = e - e^{1-x} \left(1 + \frac{x}{1!}\right) \quad \text{0,75}$$

b) **Relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}**

Soit $I_{n+1} = \int_{1-x}^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$ posons

$u(t) = (1-t)^{n+1}$ alors $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$

$v'(t) = e^t$ $v(t) = e^t$

après développement on obtient la relation $I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-x}$ (1) 0,75

c) **Egalité $I_n = e - e^{1-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$**

elle est obtenue en utilisant plusieurs fois la relation (1) pour différents indices $k=1, \dots$ jusqu'à $k = n-1$, ensuite on additionne membre à membre, on trouve

$I_n = I_1 - e^{1-x} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$ et $I_1 = e - e^{1-x} \left(1 + \frac{x}{1!}\right)$ cela conduit au résultat. 1

d) **Limite de I_n**

En intégrant sur $[1-x ; 1]$ l'encadrement du 1°), on en déduit que $0 \leq I_n \leq \frac{e \times x}{n!}$ 0,5

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$ donc $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1-x} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right]$ en divisant par e^{1-x} 0,5

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$ 0,5

Applications pour $x = \frac{1}{2}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{1/2}$ Pour $x = \frac{1}{3}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^{1/3}$ 0,5

Exercice 2 (4 points)

1°) a) $6092 = 135 \times 45 + 17$; $135 = 17 \times 7 + 16$; $17 = 16 \times 1 + 1$
PGCD(6092 ; 135) = 1. 0,5

b) **Conclusion** les nombres 6092 et 135 sont premiers entre eux.

2°) (E) : $6092x + 135y = 1$

Soit $(x ; y)$ une solution de (E) et $d = \text{PGCD}(x ; y)$ 0,5

il existe k et k' tel que $x = kd$ et $y = k'd$ en remplaçant dans (E) on a :

$d(6092k + 135k') = 1$ donc $d|1$ alors $d=1$. x et y sont premiers entre eux.

3°) En utilisant l'algorithme d'Euclide on trouve :

$1 = 6092 \times 8 - 135 \times 361$ 0,5

le couple $(8 ; -361)$ est donc une solution particulière de (E).

4° a) Résolution de (E)

$$\begin{cases} 6092x + 135y = 1 \\ 6092 \times 8 + 135 \times (-361) = 1 \end{cases} \text{ équivaut à } 6092(8-x) = 135(y+361)$$

comme 6092 et 135 sont premiers entre eux, en appliquant le théorème de Gauss on obtient $8-x = 135k$ et $y+361 = 6092k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. D'où les solutions de (E)

$$S = \{(8-135k ; -361+6092k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}.$$

4° b) (E') équivaut à $6092x = 45(1-3y)$

Si $(x ; y)$ est solution de (E') alors 45 divise $6092x$, or 45 ne divise pas 6092 donc 45 divise x , càd x est multiple de 45.

En prenant $x = 90$ on obtient $y = -4061$, le couple $(90 ; -4061)$ est une solution particulière de (E').

Résolution de (E')

$$\begin{cases} 6092x + 135y = 45 \\ 6092 \times 90 + 135 \times (-4061) = 45 \end{cases} \text{ alors } 6092(x-90) = 135(-y-4061)$$

6092 et 135 sont premiers entre eux

donc 135 divise $(x-90)$, il existe λ tel que

$(x-90) = 135\lambda$ alors $(-y-4061) = 6092\lambda$. L'ensemble des solutions de (E') est :

$$S = \{(90 + 135\lambda ; -4061 - 6092\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}\}$$

5°) $6092 = 870 \times 7 + 2$ donc $6092 \equiv 2 \pmod{7}$ par conséquent

$$6092^{135} \equiv 2^{135} \pmod{7} \text{ or } 135 = 3 \times 45 \text{ et } 2^{135} \equiv (2^3)^{45} \equiv (1)^{45} \equiv 1 \pmod{7}$$

Le reste de la division de 6092^{135} par 7 est donc 1.

Problème (11 points)

Partie A (2,5 points)

1°) **Nature et éléments caractéristiques de r**

la composée de deux symétries d'axes sécants est une rotation de centre le point d'intersection des deux droites et pour angle le double de l'angle des deux droites.

Donc $r = s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre J, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2°) a) Expression analytique de s_3

(d_3) est la droite d'équation $y = 4x + 1$

le milieu de $[MM'] \in (d_3)$ et $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonale à $\vec{v}(1 ; 4)$ ce qui conduit à :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{17}(-15x + 8y - 8) \\ y' = \frac{1}{17}(8x + 15y + 2) \end{cases}$$

2°) b) Détermination des points M tel que $M' \in C(O ; 3)$

l'image d'un cercle est un cercle de même rayon par s_3 , s_3 est une involution donc

$s_3^{-1} = s_3$, l'ensemble cherché est le cercle de centre $s_3(O) = O' = (-\frac{8}{17} ; \frac{2}{17})$ et de

rayon 3.

2°) c) Existence de s_4 et équation cartésienne de (d_4) .

La droite (d_3) passe le centre de la rotation r par conséquent il

une droite (d_4) et s_4 la symétrie orthogonale par rapport à (d_4) tel que $s_4 \circ s_3 = r$

Une construction possible de la droite (d_4) , c'est l'image de (d_3) par la rotation de

centre J d'angle $\frac{\pi}{4}$. On sait que (d_4) passe par J, on cherche B' l'image d'un point B

de d_3 puis forme l'équation de la droite $(JB') = (d_4)$.

On trouve (d_4): ~~$5x + 3y - 3 = 0$~~ $5x + 3y - 3 = 0$

Partie 2 (8 points)

1°) Existence et unicité de f .

On prouve que $AB = A'B' = \sqrt{2}$ et $A \neq A'$ d'après le cours il existe un et un seul déplacement f tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ 0,5

Ecriture complexe de f de la forme $z' = az + b$ on trouve $a = i$ et $b = -3 - 3i$

f est la rotation de centre $W(0; -3)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ 0,5

2°) a) Montrons que $f = T \circ R$

Ecriture complexe de R : $z' = iz + z_A(1-i) = iz + 5(1-i)$.

Ecriture complexe de T : $z' = z - 8 + 2i$.

$Z \xrightarrow{R} Z_1 \xrightarrow{T} Z_2$ 0,5

$Z_1 = iZ + 5(1-i)$ $Z_2 = Z_1 - 8 + 2i = iZ - 3 - 3i$ *cqfd.*

2°) b) Nature du quadrilatère $AA'B'B_1$

Il est évident que c'est un parallélogramme.

3°) Cocyclicité (aucune méthode n'est imposée) 0,5

Les affixes de B et B_1 sont conjugués dont les points B et B_1 sont symétriques par rapport (Ox) (OA) est médiatrice de $[BB_1]$ d'où $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$. 0,25

On démontre de même que

$(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IO}) = -\frac{3}{4}\pi (2\pi)$ 0,25

$(\overrightarrow{WB}; \overrightarrow{WO}) = \frac{\pi}{4} (2\pi)$. 0,25

Il est évident que ces angles ont la même mesure modulo π . Donc les points O, I, A, B et W sont cocycliques. 0,25

4°) a) Détermination de (\mathcal{C}) c' est le cercle de centre le point U d'affixe $3 - 3i$ et de rayon 2. 0,5

b) g est la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $-\frac{\pi}{4}$ de centre le point d'affixe 6. 0,5

c) $g(K) = O$ alors $z_K = 3 - 3i$. 0,25

Utiliser g pour retrouver (\mathcal{C}) *si on trouve le cercle \mathcal{C}* 0,5

d) il est évident que $M(t) = M(t + 2\pi)$ et $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport (Ox) . On conclut que le domaine d'étude est $[0; \pi]$ 0,5

e) Variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ 1

f) Représentation de (Γ) 1

Montrons que c'est un cercle on sait que $2 - 4\sin^2 t = 2\cos 2t$

équation Alors $x^2 + y^2 = 2$, cercle de centre O et de rayon 2. 0,25

$F(U) = O$, f est une rotation, conserve les distances, l'image du cercle (\mathcal{C}) est le cercle de même rayon et de centre $f(U) = O$, c'est donc le cercle (Γ) 0,5