RÉPUBLIQUE GABONAISE

DIRECTION DU BACCALAURÉAT

2013-MATHEMATIQUES

Séries : **C-E**

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, **une seule** des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la question choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte **1 point** ; une réponse inexacte enlève **½ point**. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O,\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne le point $S(1;\ -2\,;0)$ et P le plan d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$A: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \qquad B: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

$$C: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \qquad D: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$A: (-4; 0\,; 0) \quad B: \left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{3}{5}\right) \quad C: \left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad D: \left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$A: \frac{\sqrt{11}}{3} \quad B: \frac{3}{\sqrt{11}} \quad C: \frac{9}{\sqrt{11}} \quad D: \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère et du plan P est égale

A: au point $I(1;\ -5; 0\ )$

B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\dfrac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Exercice 2 (4 points)

(Les questions de 1 à 3 sont indépendantes)

1. Soit α, a et b trois entiers naturels non nuls tels que : α = PGCD(a, b). Montrer que α divise $\lambda a + \mu b$ avec λ et μ deux entiers relatifs.
2. Soit $a = 5n^2 + 7$ et $b = n^2 + 2$.
   a) Démontrer que PGCD (a, b) divise 3.
   b) Montrer que si le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2, alors PGCD (a, b)=3 .
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ est divisible par 5.

Exercice 3 (7 points)

(Suite définie par une intégrale-volume d'un solide engendré)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (1 - lnx)^2$.

1) Etudier les variations de f.

2)a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de$[e, +\infty[$ sur$[0, +\infty[$.

b) Démontrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $g^{-1}(x) = e^{1-\sqrt{x}}$.

3) Tracer la courbe (C) de f et celle (C') de g^{-1} dans un repère orthonormé$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *(Unité graphique : 1cm sur chaque axe).*

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_1^e (1 - lnx)^n dx$.

1) Justifier l'existence de I_n.

2) Calculer I_1.

3) En utilisant une intégration par partie, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

4) On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses 1 et e. Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB de la courbe (C) autour de l'axe $(O, \vec{\imath})$. Calculer V.

5) Montrer que (I_n) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

6) Montrer que (I_n) converge. En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 **(5 points)**

(Nombres complexes et transformations)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ définie par :

$$z' = (m+i)z + m - 1 - i$$

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.
3. Dans la suite de l'exercice on pose : $m = 1$.

   a) Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_M.

   b) Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\dfrac{z'-1}{z-1}$. En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'-1}{z-1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

   c) Démontrer que, pour tout nombre z on a :

   $$z' - z = i(z-1)$$

   En déduire que si M est distinct de Ω, alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

4. On définit dans le plan une suite (Mn) de points en posant :

$M_0 = O$, $M_1 = T_1(M_0)$, pour tout entier naturel n non nul : $M_n = T_1(M_{n-1})$.

   a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

   b) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique, puis exprimer le terme général de cette suite en fonction de n. Converge-t-elle ?

Corrigé du sujet du Bac C-E

Exercice1

1. réponse D

2. Réponse D
   En remplaçant $x, y\ et\ z$ respectivement par $1+t, -2+t$ et $-3t$ dans l'équation de (P), on obtient :$t = \frac{-3}{11}$. Ce qui nous amène à la réponse D.

3. Réponse B
   En effet :$d\left(S\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, (P)\right) = \frac{|1x_S - 2y_S - 3z_S + 4|}{\|\vec{n}\|} = SH.$

4. Réponse B
   La sphère de centre S est de rayon 3> SH, donc (P) et la sphère sont sécantes.
   Soit Q un point de (P) et de la sphère, alors SHQ est rectangle en H.
   Donc d'après la propriété de Pythagore :$HQ = \sqrt{SQ^2 - SH^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{11}} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$

Exercice 2 (arithmétique) (4 points)

1.Si $\alpha = pgcd(a; b)$, alors :α/a et α/b.
Donc α divise toute combinaison linéaire de a et b.

2.a) $pgcd(a; b) = pgcd(5n^2 + 7; n^2 + 2) = pgcd(n^2 + 2; -3) = pgcd(n^2 + 2; n^2 - 1).\ (n \in \mathbb{N}^*)$
Or : $n^2 + 2 = 1 \times (n^2 - 1) + 3$
Donc : $pgcd(n^2 + 2; n^2 - 1) = 3$
d'où : $pgcd(a; b) = 3.$

b)On a :$n \equiv 2[3] \Leftrightarrow n = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}.$
Donc: $pgcd(5n^2 + 7; n^2 + 2) = pgcd\big(3(3k^2 + 4k + 2); 3(15k^2 + 20k + 9)\big)$
$= 3 \times pgcd(3k^2 + 4k + 2;\ 15k^2 + 20k + 9)$
Or :$5(3k^2 + 4k + 2) - 1(15k^2 + 20k + 9) = 1.$
Donc : $pgcd(3k^2 + 4k + 2;\ 15k^2 + 20k + 9) = 1$
D'où : $pgcd(5n^2 + 7; n^2 + 2) = 3.$
3.
On sait que :$16 \equiv 1[5]\ et\ 7^2 \equiv -1[5]$
Donc : $7^{2n} \equiv (-1)^n[5]$
Par suite :$\underline{16 \times 7^{2n} \equiv (-1)^n[5]}$.

De plus :$28 \equiv 3[5]$, $3^2 \equiv -1[5]$ et $3^3 \equiv 2[5]$.
Donc : $3^{2n+3} \equiv 2(-1)^n[5]$
Par suite :$\underline{28 \times 3^{2n+3} \equiv (-1)^n[5]}$.

Ainsi : $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3} \equiv 0[5]$
Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3 (Suite définie par une intégrale-volume d'un solide engendré) (7 points)
Partie A

1. La fonction $x \longmapsto 1 - lnx$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc $x \longmapsto (1 - lnx)^2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.
$\forall x > 0, f'(x) = 2\left(\frac{lnx-1}{x}\right)$.
Donc $f'(x)$ est du signe de $lnx - 1$.
Or:$lnx - 1 \geq 0 \Leftrightarrow lnx \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$.
Donc f est croissante sur$[e; +\infty[$ et strictement décroissante décroissante sur $]0; e[$.

2. a) On pose $g(x) = f(x), x \in [e; +\infty[$.
Or f est dérivable et croissante sur $[e; +\infty[$, f réalise donc une bijection croissante de $[e; +\infty[$ vers $f([e; +\infty[) = [f(e), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0; +\infty[$.
En effet :
$\lim_{x\to+\infty}(1 - lnx) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}(1 - lnx)^2 = +\infty$.
Donc g réalise une bijection de $[e; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$.
b) Posons $y = f(x), y \in [0; +\infty[$.
$y = f(x) \Leftrightarrow y = (1 - lnx)^2 \Leftrightarrow lnx = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow e^{lnx} = e^{1-\sqrt{y}}$.
Donc $g^{-1}(x) = e^{1-\sqrt{x}}, x \in [0; +\infty[$.

3.
- Tableau de variations de f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

- Tableau de variations de g^{-1}.
$\forall x \geq 0, (g^{-1})'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{1-\sqrt{x}} < 0$.
Donc g^{-1} est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	‖	$-$	
$(g^{-1})(x)$	‖ e	$\searrow$	0

Partie B

1. . La fonction $x \longmapsto 1 - lnx$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, elle par conséquent continue sur$]0;+\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto (1 - lnx)^n$ (n entier naturel non nul) est dérivable sur $]0;+\infty[$, par suite continue sur $]0;+\infty[$.

Or , toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives ;

Donc I_n est bien défini.

2.$I_1 = \int_1^e (1 - lnx)^1 \mathrm{dx} = [2x - xlnx]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - 2.$

3. Posons :$\begin{cases} u(x) = (1 - lnx)^n \Rightarrow u'(x) = -\frac{n}{x}(1 - lnx)^{n-1} \\ v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x \end{cases} \Rightarrow I_n = [x(1 - lnx)^n]_1^{\mathrm{e}} - (-\mathrm{n}) \int_1^{\mathrm{e}} (1 - lnx)^{n-1} dx.$

Donc :$I_n = -1 + nI_{n-1}$

D'où : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

4. On a par définition que :$V = \pi \int_1^e f^2(x)dx = \pi \int_1^e (1 - lnx)^4 dx = \pi \times I_4 = \pi \times (-1 + I_3)\, cm^3$

Or :$I_2 = -1 + 2I_1 = 2e - 5$; $I_3 = -1 + 3I_2 = 6e - 16$ et $I_4 = -1 + 4I_3 = 24e - 65$

Donc :$\boxed{V = (24e - 65)\pi\, cm^3}$

5.

- Montrons que la suite (I_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \int_1^e (1 - lnx)^{n+1} dx.$

Et :$I_{n+1} - I_n = \int_1^e (-lnx)(1 - lnx)^n dx$

Or pour tout réel x de l'intervalle $[1;e]$: $-1 \leq -lnx \leq 0$; $0 \leq 1 - lnx \leq 1$ et donc $(1 - lnx)^n \geq 0$;

Donc la fonction $x \longmapsto (-lnx)(1 - lnx)^n$ est négative sur $[1;e]$.

D'où : $\int_1^e (-lnx)(1 - lnx)^n dx \leq 0 \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Ce qu'il fallait démontrer.

- En raisonnant par récurrence, nous obtenons le résultat demandé : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}.(*)$

  Pour $n = 1, 0 \leq I_1 = e - 2 \leq \frac{1}{1},$

  On suppose la relation (*) est toujours vraie pour n fixé $(n > 1)$,démontrons que la relation (*) est encore vraie pour l'entier $n + 1$, c'est-à-dire que : $0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

  On sait que $(1 - lnx)^{n+1} \geq 0$ sur $[1;e]$, donc$\int_1^e (1 - lnx)^{n+1} dx \geq 0$.soit : $0 \leq I_{n+1}$.

  De plus : $I_{n+1} - \frac{1}{n+1} = -\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + (n+1)I_n$

  Or d'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

  Et : $-\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq I_{n+1} - \frac{1}{n+1} \leq -\left(\frac{n^2+n-1}{n+1}\right) < 0.$

  Donc : $0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

  Par suite : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

6.

- La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.
- En appliquant le théorème sandwich à l'inégalité de la question 6, on a :$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

<u>Exercice 4</u> (Nombres complexes et transformations) (5 points)

1. Si T_m est une translation, alors :$m + i = 1$.
Soit :$m = 1 - i \in \mathbb{C}$.
Or :$m \in \mathbb{R}$.
Donc il n'existe pas de nombre réels m tels que T_m soit une translation.

2. T_m rotation implique que :$|m + i| = 1 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
On a donc :$z' = iz - 1 - i$.

- $z' = z \Leftrightarrow (1 - i)z = -1 - i = -i$;
- $z' - (-i) = iz - 1 = i(z - (-i))$ et $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

<u>DoncT_0 est la rotation de centre d'affixe – i et d'angle $\frac{\pi}{2}$.</u>

3.a)Pour $m = 1$, on a : $z' = (1 + i)z - i$.
$z' = z \Leftrightarrow z = (1 + i)z - i \Leftrightarrow z = 1$.
<u>Ω est donc le point invariant de T_0 d'affixe 1.</u>

b)

- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \frac{z'-1}{z-1} = 1 + i$.
- On a :$\left|\frac{z'-1}{z-1}\right| = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right) = \arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$;
  Donc : $\frac{z'-1}{z-1} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ou bien $z' - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}(z - 1)$.
  On a l'écriture complexe de la similitude de centre Ω et de rapport $\sqrt{2}$.

c)

- $z' - z = (1 + i)z - i - z = iz - i = i(z - 1)$.
- $z' - z = i(z - 1) \Rightarrow |z' - z| = |z - 1|$,donc :$MM' = \Omega M$ (1)
  $Arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow mes\widehat{(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{MM'})} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (2)
  (1) et (2) entraine que $\Omega MM'$ rectangle isocèle en M.

4.a) voir figure en annexe.

b) on pose : $d_n = \Omega M_n$.
Donc :$d_{n+1} = \Omega M_{n+1}$.
Or :$T_1(M_n) = M_{n+1}$, d'après 3c), $\Omega M_n M_{n+1}$ rectangle isocèle en M_n.
En utilisant la propriété directe de Pythagore dans ce triangle, on a : $\Omega M_{n+1} = \sqrt{2}\,\Omega M_n$.
Donc : $d_{n+1} = \sqrt{2}d_n$.
(d_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $d_0 = \Omega M_0 = \Omega O = 1$.

- $d_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$.
- $\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$, car $\sqrt{2} > 1$; donc la suite (d_n) est divergente.

Grille de correction

Exercice 1 (4 points)

+1 Question 1	Point acquis à tous les élèves quel que soit leurs réponses	Réponse exacte : 1	Réponse inexacte : $-\frac{1}{2}$	Absence de réponse : 0
Question 2	Réponse exacte D			
Question 3	Réponse exacte B			
Question 4	Réponse exacte B			
	Total			
Si le total des points obtenus à chaque ~~question~~ l'exo est négatif, la note est ramenée à 0				

Exercice 2 (4 points)

1	1.		Démarche et cohérence des procédures utilisées	1	1 pt
			Démarche incomplète (manque de cohérence)	0,5	
1	2.	a.	Démarche et cohérence des procédures utilisées	1	1 pt
			Démarche incomplète (manque de cohérence)	0,5	
1		b.	Démarche et cohérence des procédures utilisées	1	1 pt
			Démarche incomplète (manque de cohérence)	0,5	
1	3.		Démarche et cohérence des procédures utilisées	1	1 pt
			Démarche incomplète (manque de cohérence)	0,5	

Exercice 3 (7 points)

Partie A (3 points)

3

1.	L'élève utilise la composée de fonction.		Bonne démarche avec une cohérence dans les étapes	0,75	0,75	1
			Démarche peu cohérente	0,25		
	L'élève étudie le signe de la fonction dérivée		Dérivabilité de f	0,25	0,75	
			Détermination de la fonction dérivée	0,25		
			Signe de la fonction dérivée	0,25		
	Variation de la fonction f		Résultat correct	0,25	0,25	
2.	a.		Bonne démarche avec une cohérence dans les étapes	0,5	0,5	
			Démarche peu cohérente	0,25		
	b.		Bonne démarche avec une cohérence dans les étapes 0,5	0,5	0,5	
			Démarche peu cohérente	0,25		
3.	Tracé des courbes		Respect de l'unité graphique	0,25	1	
			(C)	0,5		
			(C') 0,25 pour (Δ)	0,25		

Partie B (4 points)

4

1.	Démarche complète et cohérente	0,5	0,5
	Démarche peu cohérente (quelques étapes manquent)	0,25	
2.	Démarche (intégration de somme de fonction, intégration par partie ou mise en évidence directe d'une primitive)	0,5	0,75
	Résultat correct.	0,25	
3.	Démarche (Procédé d'intégration par partie)	0,5	0,5
4.	Formule du volume	0,25	0,75
	Démarche (cohérence des étapes de calculs)	0,25	
	Résultat correct	0,25	

5.	Décroissance de la suite : Démarche 0,25+0,25	0,5	1
	Encadrement du terme de la suite 0,25+0,25	0,5	
6.	Mise en évidence des conditions de convergence de la suite	0,25	0,5
	Résultat correct avec démarche	0,25	

Exercice 4 (5 points)

1.		Bonne réponse et justification	0,5	0,5
2.		Démarche	0,25	1
		Résulta correct	0,25	
		Affixe de centre	0,25	
		Angle de la rotation	0,25	
3.	a.	Résultat correct $\Omega(1)$		0,25
	b.	Réponse exacte du rapport $\frac{z'-1}{z-1} = 1 + i$	0,25	1
		Bonne interprétation de $\left\lvert\frac{z'-1}{z-1}\right\rvert = \sqrt{2}$	0,25	
		Bonne interprétation de $\arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$	0,25	
		Caractéristique de T_1 (question dépendante des données précédemment trouvées)	0,25	
	c.	Démarche	0,25	0,5
		Démarche	0,25	
4.	a.	Construction des quatre points	$0{,}25 \times 4$	1
	b.	Démarche de résolution	0,25	0,75
		Expression du terme général de cette suite	0,25	
		Etude de la convergence de cette suite	0,25	