REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2010- MATHEMATIQUES
Série : C-E
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

Exercice 1 : (7 points)

Soit $(f_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ la suite de fonctions définies sur $[0; {}^{\pi}/_{2}]$ par : $\begin{cases} f_n(t) = \dfrac{\sin nt}{\sin t} & si\ t \neq 0 \\ f_n(0) = n \end{cases}$.

1°) Vérifier que f_n est continue en 0.

2°) Etudier la continuité de f_n ; puis justifier l'existence de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt.$$

3°) On définit pour n ∈ N; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nt}{\sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt.$

On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$.

$(I_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ désigne la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt.$

a) Démontrer, pour tout entier n, que :

$I_{n+2} - I_n = \frac{2}{n+1} \sin(n+1)\frac{\pi}{2}.$

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $I_{2n+1} - I_{2n-1} = 0.$

c) Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(t)\, dt;$ puis en déduire la valeur de I_{2n+1}.

4°) On rappelle que pour tout entier naturel k on a :

$\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{k+1}.$

a) Prouver à partir de 3°) a) que : $I_{2n} - I_{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \times (-1)^{n+1}.$

b) Démontrer que alors que :

$$I_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

5°) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_{2n+1} - I_{2n}) = 0.$ En déduire la limite de la suite $(I_{2n})_{(n\in\mathbb{N})}$.

Exercice 2 : (6 points)

Le plan $(\mathcal{P})$est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, (Γ) désigne l'ensemble des points $M(x\,; y)$ tel que : $x^2 - y^2 = 1$.

1°) a) Quelle est la nature exacte de (Γ) ? Donner les éléments caractéristiques de (Γ) : centre, asymptotes et sommets.

b) Représenter graphiquement (Γ) dans $(\mathcal{P})$.

2°) On désigne par (Γ_1) la partie de (Γ) formés des points qui ont une abscisse strictement positive.

a) Démontrer que si $M(x\,;y)$ appartient à (Γ_1) ; alors $x \geq 1$.

b) Soit $M(x\,;y)$ démontrer que si $M(x\,;y)$ appartient à (Γ_1) alors on a :
$x + \sqrt{x^2-1} > 0$ et $x - \sqrt{x^2-1} > 0$.

c) En déduire que si $M(x\,;y) \in (\Gamma_1)$ alors : $x + y > 0$ et $x - y > 0$

d) Démontrer que si $M(x\,;y) \in (\Gamma_1)$ alors il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x+y = e^t \\ x-y = e^{-t} \end{cases}$.

e) Inversement, démontrer que s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x+y = e^t \\ x-y = e^{-t} \end{cases}$ alors
$M(x\,;y) \in (\Gamma_1)$.

f) Déterminer alors une représentation paramétrique de (Γ_1).

3°) Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x\,;y)$ associe le point $M'(x'\,;y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x-y \\ y' = x+y \end{cases}$. Donner l'écriture complexe de f, préciser sa nature exacte ainsi que ses éléments caractéristiques.

4°) On pose $(\Gamma_2) = f((\Gamma_1))$.
Déterminer une équation cartésienne, puis représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct (Γ_2).

Exercice 3 : (7 points)

Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ d'unités graphiques 1cm sur $(O;\vec{\imath})$ et 5cm sur $(O\,;\vec{\jmath})$. Pour tout x > 0, on pose :

$$g_n(x) = \frac{(lnx)^n}{1+x^2} = \frac{ln^n x}{1+x^2};\quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de g_n.

1°) En tenant compte de la parité de n, calculer $\lim\limits_{x\to 0} g_n(x)$.

2°) Pour tout $x > 0$ et en posant $x = e^t$, montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{1+e^{2t}}. \text{ En déduire } \lim_{x\to+\infty} g_n(x).$$

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) a) Montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, g_n est dérivable sur]0 ; +∞[puis calculer $g'_n(x)$.

b) On pose pour tout $x > 0$: $\varphi_n(x) = n\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 2lnx$.

Montrer que pour tout $x > 0$: $g'_n(x) = \frac{x(lnx)^{n-1}}{(1+x^2)^2}\,\varphi_n(x)$.

c) Etudier les variations de φ_n sur]0 ; +∞[. Calculer les limites de φ_n aux bornes de]0 ;+∞[, puis dresser son tableau de variations complet.

d) Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une solution unique sur]0 ; +∞[notée α_n.
Vérifier que : $\alpha_n \in\,]e^{n/2}\,;\ e^n[$. En déduire le signe de φ_n sur]0 ; +∞[.

4°) Déduire de la question précédente les variations de g_n. On donnera le tableau de variation de g_n suivant la parité de n.

5°) Etudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_{n+1})$ et $(\mathcal{C}_n)$ suivant la parité de n

6°) a) Soit α_1 l'unique solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation $\varphi_1(x) = 0$.

Vérifier que $\alpha_1 \in [^3/_2\,;\ 2]$, puis donner un encadrement de α_1 d'amplitude 10^{-2}.

b) Vérifier que $\alpha_2 \in [3\,;3{,}1]$, puis donner un encadrement de α_2 d'amplitude 10^{-2}.

On admet que $\alpha_3 \in]4{,}78\,;4{,}79[$.

7°) Représenter $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ sur le même graphique.