Math BAC C 2012

Exercice 1

1

1° a) $\begin{cases} x(t) = e^{t} - e^{-t} \\ y(t) = e^{t} + e^{-t} \end{cases}$ on a

$\begin{cases} x(-t) = e^{-t} - e^{t} = -x(t) \\ y(-t) = e^{-t} + e^{t} = y(t) \end{cases}$

M(t) et M(t) on même ordo. et des abscisses opposée donc M(-t) et M(t) sont sy. par rapport à l'axe des ordonnée ainsi l'axe $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie pour (C).

b) x et y sont derivables sur $[0; +\infty[$ et

$x'(t) = e^{t} + e^{-t}$

$y'(t) = -e^{-t} + e^{t}$

$x'(t) > 0$ et x est croiss sur $[0; +\infty[$.

$y'(t) = e^{-t}(e^{2t} - 1)$

$= e^{-t}(e^{t}+1)(e^{t}-1)$

$e^{-t} > 0 \quad e^{t}+1 > 0$ et

$\forall t \geq 0 \quad e^{t} \geq 1$ et $e^{t} - 1 \geq 0$

$y'(t) > 0$ sur $]0; +\infty[$ et y est croissante sur $[0; +\infty[$

En conclusion x et y sont croissante sur $[0; +\infty[$.

c) $\vec{v_0}\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$ et $\vec{v_0}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La tangente à (C) en $A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirigée par $\vec{v_0}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et a pour coefficient directeur 0 donc une equation de cette tangente est la droite d'equation

$\boxed{y = 2}$

2° a) $x(t)^2 - y(t)^2 = -4$

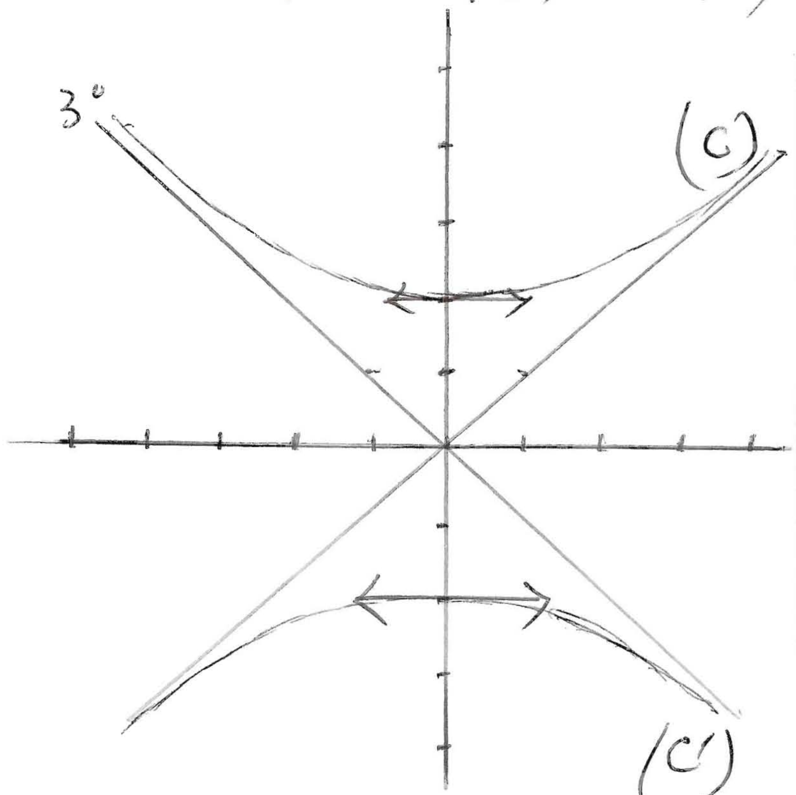
b) on a $-x^2 + y^2 = 4$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + y^2 = 4 \\ y > 0 \end{cases}$

on reconnait l'equation réduite d'une hyperbole équilatère. d'où (C) est la partie de l'hyperbole (H) tq $\begin{cases} y > 0 \\ -x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

c) (H) est une hyperbole équilatère d'asymptote $y=x$ et $y=-x$, d'axe focal l'axe $(O,\vec{J})$, d'excentricité $e=\sqrt{2}$ de foyer $F'\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ de Sommet $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $A'\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

3°



$(H) = (C) \cup (C')$.

II ②

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(-x+2y-2z+2) \\ y = \frac{1}{3}(2x+2y+z-1) \\ z = \frac{1}{3}(-2x+y+2z+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = -x+2y-2z+2 \\ 3y = 2x+2y+z-1 \\ 3z = -2x+y+2z+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x+2y-2z+2=0 \\ 2x-y+z-1=0 \\ -2x+y-z+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2x-y+z-1=0$

L'ens. des points invariant par f est le plan

(P) $2x-y+z-1=0$

2° $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longrightarrow M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

a) Mq $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction Constante.

$\overrightarrow{MM'}\begin{cases} x'-x = -\frac{2}{3}(2x-y+z-1) \\ y'-y = \frac{1}{3}(2x-y+z-1) \\ z'-z = -\frac{1}{3}(2x-y+z-1) \end{cases}$

$\overrightarrow{MM'}\begin{cases} x'-x = 2\ \frac{-2x+y-z+1}{3} \\ y'-y = -1\ \frac{-2x+y-z+1}{3} \\ z'-z = 1\ \frac{-2x+y-z+1}{3} \end{cases}$

en posant $d = \frac{-2x+y-z+1}{3}$

on a : $\overrightarrow{MM'} = d(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ ~~est~~ garde une direction constante que est celle du vecteur non nul

$\boxed{\vec{n}(2;-1;1)}$

b) $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (P) donc $(MM') \perp (P)$.

c) Montrons que $I\begin{pmatrix} \frac{x+x'}{2} \\ \frac{y+y'}{2} \\ \frac{z+z'}{2} \end{pmatrix}$ appartient à (P).

③

$2x_I - y_I + z_I - 1 =$

$x'+x - \frac{y'+y}{2} + \frac{z+z'}{2} - 1 =$

$\frac{2}{6}(2x+2y-2z+2) - \frac{1}{6}(2x+5y+z-1)$

$+\frac{1}{6}(-2x+y+5z+1) - 1 =$

$\frac{6}{6} - 1 = 0$ donc

$I \in (P)$.

d) $\begin{cases} x'' = \frac{1}{3}(-x'+2y'-2z'+2) = x \\ y'' = \frac{1}{3}(2x'+2y'+z'-1) = y \\ z'' = \frac{1}{3}(-2x'+y'+2z'+1) = z \end{cases}$

$f\circ f(M) = M$

e) f est la symetrie orthogonale par rapport au plan (P).

3°) (Q) $x+y-z+2=0$

a) $\vec{n}'(1;2;-1)$

$\vec{n}\cdot\vec{n}' = 2-1-1=0$ donc

$(P) \perp (Q)$.

b) $\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{5}{3} + z \end{cases}$$

en posant $z = t$ on a le système

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{5}{3} + t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

qui détermine une équation paramétrique de $(\Delta) = (P) \cap (Q)$.

4°) a) $A(-1; -1; 0)$

$-1 - 1 - 0 + 2 = 0$ donc $A \in (Q)$

b) g est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant la droite (Δ) donc g est le demi-tour d'axe (Δ).

c) $g(A) = f \circ S(A) = f(A)$

donc $A'\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Problème

$f_n(x) = (x-1)^n \ln x$

I $g_n(x) = n \ln x + \frac{x-1}{x}$

1° g_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g_n'(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ donc g_n est croissante sur $]0; +\infty[$.

2° a) $\lim\limits_{x \to 0} g_n(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{n x \ln x + x - 1}{x}$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} n \ln x = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$.

b) $g_n(1) = 0$

g_n est croissante et $g_n(1) = 0$

$\forall\, x > 1 \quad g_n(x) > g_n(1) = 0$

$g_n(x) > 0$

$\forall x \in]0; 1[\quad x < 1$ et $g_n(x) < 0$

d'où sur $]0; 1[$ $g_n < 0$

sur $]1; +\infty[$ $g_n > 0$

et $g_n(1) = 0$

c)

x	0		1		$+\infty$
g_n'			$+$		
g_n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II

5

1° $f_{n+1}(x) = f_n(x) \iff (x-1)^n \ln x\,(x-2) = 0$

$\iff x-1=0 \quad \ln x = 0 \quad x-2=0$

$\iff x=1$ ou $x=1$ ou $x=2$

De plus $f_n(1)=0$ et $f_n(2)=\ln 2$

donc toutes les courbes (C_n) passent par $A\binom{1}{0}$ et $B\binom{2}{\ln 2}$

2° a) La fonction $x \mapsto (x-1)^n$ et la fonction $x \mapsto \ln x$ dérivable sur $]0;+\infty[$ donc f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$.

b) $f'_n(x) = n(x-1)^{n-1}\ln x + \frac{(x-1)^n}{x}$

$= (x-1)^{n-1}\left(n\ln x + \frac{x-1}{x}\right)$

$$\boxed{f'_n(x) = (x-1)^{n-1} g_n(x)}$$

3° a) si n pair $n-1$ impair.

x	0		1		$+\infty$
$(x-1)^{n-1}$		$-$	0	$+$	
$g_n(x)$		$-$	0	$+$	
$f'_n(x)$		$+$	0	$+$	

$f'_n \geq 0$ donc f_n est croissante sur $]0;+\infty[$ si n pair.

si n impair, $n-1$ pair.

x	0		1		$+\infty$
$(x-1)^{n-1}$		$+$	0	$+$	
$g_n(x)$		$-$	0	$+$	
f'_n		$-$	0	$+$	

sur $]0;1]$ f_n est décroissante sur $[1;+\infty[$ f_n est croissante

b) $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ si n impair, $-\infty$ si n pair.

car $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to 0} (x-1)^n = 1$ si n pair

$= -1$ si n imp.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ car

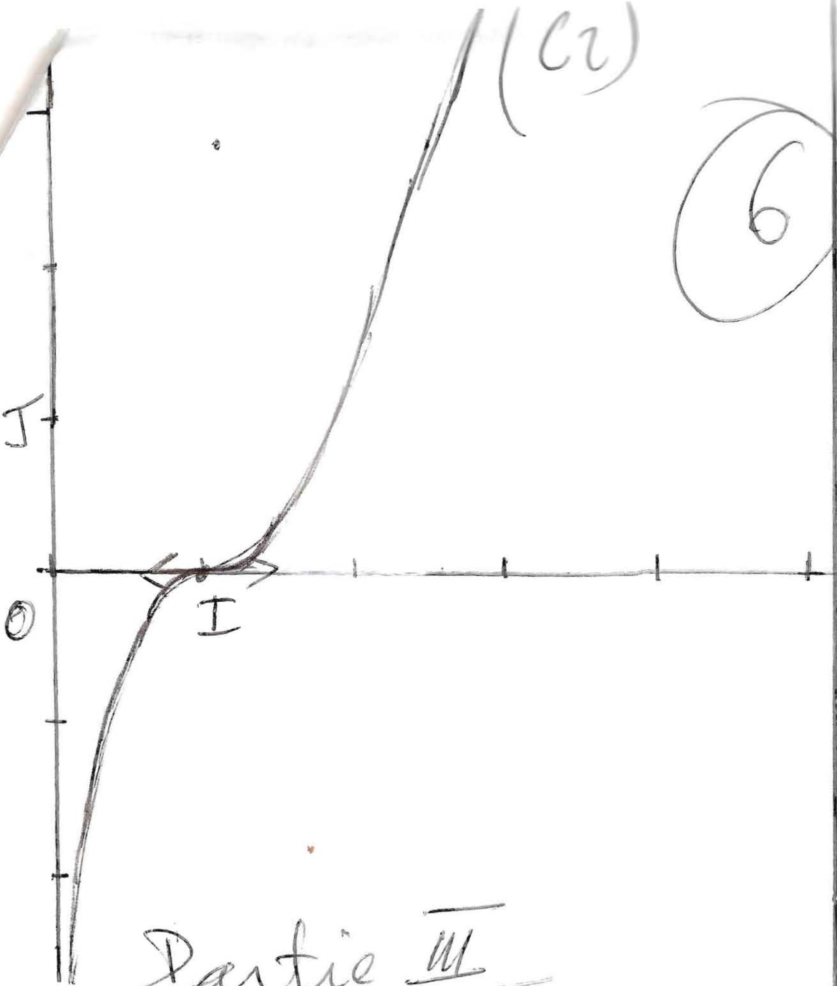
$\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

c) si n pair.

x	0		1		$+\infty$
f'_n		$+$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

si n impair

x	0		1		$+\infty$
f'_n		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Partie III

$$I_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$$

1) $\forall x \in [1;2]$ $x-1 \geq 0$
et $\ln x \geq 0$
$f_n(x) \geq 0$ et $I_n = \int_1^2 f_n\,dx \geq 0$

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^2 (x-1)^n \ln x\,(x-2)\,dx$$

or $\forall x \in [1;2]$ $(x-1)^n \ln x \geq 0$
et $x-2 \leq 0$ donc
$I_{n+1} \leq I_n$ et (I_n) décroît

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 (positive) donc elle converge.

2 a) Soit $\varphi(x) = \ln x - x$
φ est continue et dérivable sur $[1;2]$ et $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$\varphi''(x) = \frac{1-x}{x}$

x	1		2
φ'		$-$	
φ	-1	$\rightarrow$	$\ln 2 - 2$

$\varphi([1;2]) = [\ln 2 - 2; -1]$
donc $\forall x \in [1;2]$ $\varphi(x) \leq 0$ et
$\ln x \leq x$ $\forall x \in [1;2]$

Rq De plus $0 \leq \ln x \leq x$ $\forall x [1;2]$.

b) $\forall x \in [1;2]$ on a : $\ln x \leq x \leq 2$
$(x-1)^n \ln x \leq x(x-1)^n \leq 2(x-1)^n$ et $f_n(x) \leq x(x-1)^n \leq 2(x-1)^n$

c) $0 \leq \int_1^2 (x-1)^n \ln x\,dx \leq 2\int_1^2 (x-1)^n\,dx$

$0 \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

$\lim \frac{2}{n+1} = 0$ d'où $\lim I_n = 0$.