Epreuve de Mathématiques

Durée : 4Heures

SERIE : C

Le candidat doit traiter les deux exercices et le Problème.

EXERCICE 1

Dans l'espace orienté (ξ), on considère un carré ABCD de centre O tel que $OA = 1$.

1°) Démontrer que O est le barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,-2)$; $(C,1)$ et $(D,-2)$.

2°) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (ξ) tels que $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 - 2MD^2 = -4$.

3°) On désigne par S le point de (ξ) tel que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$, par d_1 et d_2 les demi-tours d'axes respectifs (OA) et (OB).

a. Préciser la nature de $d_1 \circ d_2$.

b. Déterminer l'image de (Γ) par $d_1 \circ d_2$.

c. Justifier que $\left(A; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}\right)$ est un repère orthonormé direct de (ξ).

4°) Soit l'application de (ξ) dans (ξ) qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{BM'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$

a. Démontrer que t est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$.

b. Déterminer dans le repère $\left(A; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}\right)$ une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB).

EXERCICE 2

1°) a. Calculer $\int_0^x t\, e^t dt$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

b Soient a une constante réelle et u la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\, e^x + a$.

Soit U la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

i) Exprimer U(x) à l'aide d'une intégrale.

ii) En déduire U(x) en fonction de x.

Suite en page 2

2°) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = xe^{x} - 2\int_0^1 f(x)\,dx \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

PROBLEME

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. (unité : 2 cm).

f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+5}$ et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

Partie A

1°) Etudier les variations de f.

2°) On pose $K = f(\mathbb{R})$ et on considère l'application

$$g : \mathbb{R} \to K$$
$$x \mapsto f(x).$$

a. Démontrer que g est une bijection.

b. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de g^{-1}. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de K.

3°) a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y^2 - 2xy - 5 = 0$.

b. En déduire les points de la courbe $(\mathscr{C})$ dont les deux coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Partie B

Soit M et M′ deux points distincts de $(\mathscr{C})$ d'abscisses opposées.

4°) a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.

b. Démontrer que l'application affine s du plan qui transforme M en M′ a pour expression analytique :

Suite en page 3

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

5°) a. Déterminer l'ensemble des points invariants par s.

b. Démontrer que pour tout point M d'image M′ par s, le milieu du segment $[MM']$ appartient à la droite de repère $(O\,;\vec{u})$.

c. Quelle est la nature de s ?

d. On désigne par Δ l'axe des abscisses.

i) Déterminer l'image Δ' de Δ par s.

ii) Démontrer que Δ et Δ' sont les asymptotes de $(\mathscr{C})$.

iii) Préciser les asymptotes de la courbe $(\mathscr{C}')$.

e. Construire les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ dans le même repère.

Partie C

On note E l'ensemble des nombres complexes z tels que $z - i\bar{z} \neq 0$ et pour tout z élément de E, on pose $z' = \dfrac{z + \bar{z} - 2i\sqrt{5}}{z - i\bar{z}}$.

6°) Déterminer E.

7°) Soit z un élément de E ; on désigne par M l'image de z et on pose $z = x + iy$, x et y étant des nombres réels.

a. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que $|z'| = \sqrt{2}$ est la réunion de $(\mathscr{C})$ et de son symétrique par rapport à O.

b. Construire (Γ) dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

c. Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{u}\,,\ \vec{u} + 2\vec{v})$.

En déduire la nature de (Γ).

- FIN -