# BAC BLANC COMMUN AVRIL 2007
## Epreuve de MATHEMATIQUES

**Série : C**
**Durée : 4 heures**
**Coeff : 4**

## EXERCICE 1 (5 points)

1°) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2°) Justifier l'existence du réel : $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-2x}dx$.

Calculer I à l'aide d'une intégration par parties.

3°) La fonction f est définie par $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$, montrer que f est décroissante sur $[0 ; 1]$.
En déduire les encadrements :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq I \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Déterminer la limite de $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

## EXERCICE 2 (4 points)

Dans le plan orienté $(P)$, on considère un carré $ABCD$ de centre $O$ tel que

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$k$ étant un élément de $\mathbb{Z}$. On pose $AB = a$ avec $a \in IR_+^*$

Soient $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M$ du plan $(P)$ tels que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = a^2$$

1- Soit $M$ un point du plan $(P)$.

a) Démontrer que :

$$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow \left(MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2\right)$$

b) Justifier que le point $O$ est l'isobarycentre des points $I$, $J$, $K$ et $L$.

c) Démontrer que :

$$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow \left(MO^2 = \frac{a^2}{4}\right)$$

d) Caractériser $(\Gamma)$.

2- Soit $r$ la rotation de centre $A$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $s$ la réflexion d'axe $(AB)$. On pose $f = r \circ s$ et $(\Gamma') = f(\Gamma)$.

a) Déterminer la droite $(\Delta)$ telle que $r = \varphi \circ s$, où $\varphi$ est la réflexion d'axe $(\Delta)$.

b) Caractériser l'application $f$.

c) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma')$ (on prendra $a = 4$ cm).

**Suite en page 2**

**PROBLEME** **(11 points)**

On considère la fonction $f$ définie de IR vers IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & si\ x \leq 0 \\[2ex] f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par ( $\mathscr{C}$ ) la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\right)$.

*Première partie*

1- a) Etudier les variations de la fonction $u$ définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x - \ln x$.

b) En déduire que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ , $x - \ln x \neq 0$.

2- Soit $D$ l'ensemble de définition de $f$.

a) Démontrer que $D = [-1\ , +\infty[$

b) Démontrer que $f$ est continue sur $D$.

c) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

d) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en $-1$.

3- a) Etudier les variations de $f$.

b) Construire la courbe ( $\mathscr{C}$ ).

*Deuxième partie*

4- On pose $I = [-1, 0]$ et $J = f(I)$.

Soit la fonction :

$$\begin{aligned} g : I &\rightarrow J \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

et ( $\mathscr{C}'$ ) sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{e_1}\,,\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

a) Démontrer que $g$ est bijective.

Soit $g^{-1}$ la bijection réciproque de $g$.

b) Dresser le tableau de variation de $g^{-1}$ puis construire sa courbe $(\Gamma)$ dans le même repère que ( $\mathscr{C}$ ).

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x$ élément de $J$.

d) Calculer

$$\int_{-1}^{0} \left[g^{-1}(x)\right] dx$$

**Suite en page 3**

5- Soit $A$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\Gamma)$, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

a) Calculer $A$.

b) En déduire l'aire du domaine plan compris entre les courbes ( $\mathscr{C}'$ ) et $(\Gamma)$.

*Troisième partie*

Pour tous nombres réels $x$ et $y$ tels que $0 < y < 1$, on considère le nombre complexe $z$ défini par :

$$z = x + i\,\frac{y - 1}{1 + \sqrt{-y^2 + 2y}} \qquad avec\ i^2 = -1$$

Soit $(\Gamma')$ l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ telle que $\arg z = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

6- Soit $u$ un nombre complexe non nul.

Démontrer que :

$$\left(\arg u = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Im}(u) \\ \mathrm{Im}(u) < 0 \end{cases}$$

7- Soit $M(x,y)$ un point du plan.

a) Etablir que :

$$\left(M \in (\Gamma')\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y-1}{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que

$$\left(M \in (\Gamma')\right) \Leftrightarrow \left(y = g^{-1}(x) + 1\right)$$

c) Démontrer que $(\Gamma')$ est l'image de $(\Gamma)$ par une translation $t$ et caractériser $t$.

8- a) En déduire que $(\Gamma')$ est l'image de ( $\mathscr{C}'$ ) par la composée d'une symétrie orthogonale et de la translation $t$.

b) Préciser les éléments caractéristiques de cette composée.

**FIN**

# Corrigé

## Exercice 1

1°a) Mq $\forall x>0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

Soit $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad x \in ]0;+\infty[$

les fonctions $x \mapsto \frac{x+1}{x}$ et $x \mapsto \frac{-1}{x+1}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$, de plus $\frac{x+1}{x} > 0$ et donc $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$\forall x>0 \quad f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$ et 0,25

$f$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x} = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0$

$f$ est dérivable et décroissante 0,25 sur $]0;+\infty[$ donc $f(]0;+\infty[) = ]\lim\limits_{+\infty} f ; \lim\limits_{0} f[$
$= ]0;+\infty[$

ainsi $\forall x>0 \quad f(x) > 0$ et alors

0,25 $\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad \forall x>0 \quad (1)$

Rq L'élève peut exploiter le TV de f

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

D'après le TV 0 est un minorant de $f$ sur $]0;+\infty[$ donc $f > 0$

et $\forall x>0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

• Soit $g(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad x>0$

$g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$ et $g$ est décroissante sur $]0;+\infty[$. 0,25

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{0} \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - x\ln(x+1) + x\ln x}{x}$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+1) = 0$

0,25 $g$ est dérivable et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc

$g(]0;+\infty[) = ]\lim\limits_{+\infty} g ; \lim\limits_{0} g[$
$= ]0;+\infty[$.

ainsi $\forall x>0 \quad g(x) > 0$ et

alors $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad \forall x>0 \quad (2)$ 0,25

(1) et (2) donc

$\forall x>0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

Rq Pour montrer que $g(x) > 0$ l'élève peut utiliser le minorant 0 à l'aide du TV et ainsi la limite de $g$ en 0 n'est plus obligatoire.

déduisons de 1°a) que $\forall x>0$ (2)

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x < e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

vec $\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad \forall x>0$

a $1 < (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$1 < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ car $\alpha \ln a = \ln a^\alpha$

nc $e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} \quad (1)$

vec $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ on a $x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < 1$

$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x < 1$ ainsi

$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x < e \quad (2)$ 0,5

1) et (2) donne $\forall x>0$

$$\boxed{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x < e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}}$$

Demontrons par recurrence

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

otons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

Pour $n=1$ on a $\frac{(1+1)^1}{1!} = 2$ ; $e^1 = e$

$\frac{(1+1)^{1+1}}{1!} = 4$ et $2 < e < 4$ car $2<e<3$

donc $P_0$ vraie.

Soit $n$ un entier naturel

upposons $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

Mq $\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} < e^{n+1} < \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)!}$

D'après 1a $\forall x>0$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x < e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

avec $n$ entier naturel et $n+1$ entier naturel on a :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$

or par hypoth. $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

Par produit membre à membre des termes positifs on a :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \times \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} < e^{n+1} < \frac{(n+2)^{n+2}(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}\, n!}$$

par simplification on a :

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)\,n!} < e^{n+1} < \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)(n!)}$$

or $(n+1)n! = (n+1)!$ donc on a :

$$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} < e^{n+1} < \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)!}$$

et $P_{n+1}$ vraie

D'après le principe de recurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}}$$

0,5

2 a) Soit $\Omega$ l'univers associé à cette epreuve. On a

$\text{card}\,\Omega = 50 \times 50 = 2500$

a) C " $a=b$ " on a

$C = \{(1;1);(2,2);\ldots(50,50)\}$

card $C = 50$ et $\boxed{P(C) = \frac{50}{2500} = \frac{1}{50}}$

0,5

$E = \{(a,b) ;\ b \geq a\}$ (3)

si $a=1$ on a 50 couples solutions

$a=1$ 49

⋮

$a=50$ on a 1 couple soluti-

ainsi

$\mathrm{card}\,E = 1+2+3+\cdots+50$

$= \frac{50}{2}(1+50) = 25\times 51$ 0,5

$$\boxed{P(E) = \frac{25\times 51}{2500} = \frac{51}{100} = 0,51.}$$

) Soit F l'évé' " E est réalisé au moins 2 fois ".

$\overline{F}$ est l'évé' " E est réalisé au plus 1 fois "

$P(\overline{F}) = C_5^0 (0,49)^5 + C_5^1 (0,51)(0,49)^4$

$P(\overline{F}) \simeq 0,18$ 0,5

et $\boxed{P(F) = 1 - P(\overline{F}) \simeq 0,82}$

II

1° a) Nature de $F = R' \circ S \circ R$

S étant la symétrie de centre B est une rotation de centre B et d'angle $\pi$ ainsi F est la composée de trois rotation de centres distincts et la somme des angles est 0,5

$\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = \pi$ d'où F est une rotation d'angle $\pi$

et plus précisément F est

b) Montrons que l'écriture complexe de F est $z' = -z - id +$

R a pour écriture complexe $z_1 = iz$

S a pour " " $z_2 = -z_1 + 2(d+$

R' " " $z_3 = -iz_2 + id +$

L'écriture complexe de $F = R' \circ S \circ R$ est alors

$z_3 = -iz_2 + id + d$

$= -i(-z_1 + 2d + 2id) + id + d$

$= iz_1 - 2id + 2d + id + d$

$z_3 = i(iz) - id + 3d$

$z_3 = -z - id + 3d$ 0,75

Ainsi l'écriture complexe de F est $z' = -z - id + 3d$

Le centre de F est le point $\Omega$ d'affixe $\frac{3d - id}{2} = \frac{3}{2}d - \frac{i}{2}$ 0,25

2 a) $S' = S_{(AC)}$ 0,25

$S' \circ F$ est la composée d'un antidéplacement ($S'$) et d'un déplacement (F) donc $S' \circ F$ est un antidéplacement

b) L'écriture complexe de $S'$ est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$. 0,25 + 0,25

$\begin{cases} S'(A) = A \\ S'(C) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = ad + b \\ id = -aid + b \end{cases}$

(4)

l'ecriture complexe de $S'$ est $\boxed{z' = -i\bar{z} + d + id}$ 0,25

L'ecriture complexe de $S'oF$ est

$z' = -i\,\overline{(-z - id + 3d)} + d + id$

$z' = -i(-\bar{z} + id + 3d) + d + id$

$z' = +i\bar{z} + d - 3id + d + id$

$\boxed{z' = +i\bar{z} - 2di + 2d}$

0,5

c) Determinons l'ensemble des points invariants par $S'oF$.

$S'oF(M) = M \Leftrightarrow x + iy = +i(x - iy) - 2di + 2d$

$\Rightarrow x + iy = +ix + y - 2di + 2d$

$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 2d \\ y = x - 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2d = 0 \\ x - y - 2d = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x - y - 2d = 0$ 0,5

L'ensemble des points invariants par $S'oF$ est la droite $(\Delta_d)$ d'equation $x - y - 2d = 0$

$S'oF$ est un antideplacement qui admet la droite $(\Delta_d)$ pour ensemble des points invariants donc

$S'oF$ est la symetrie orthogonale d'axe 0,25

$(\Delta_d)$ $x - y - 2d = 0$.

$(\Delta_d)$ $y = x - 2d$

d) La droite $(D)$ d'eq $y = -x + 1$ est orthogonale à $(\Delta_d)$ car $(1)(-1) = -1$ 0,25

donc $(D)$ est globalement invariante par $S'oF$.

<u>Rq</u> On peut aussi montrer que.

$S'oF((D)) = (D)$.

## Problème ⑤

### Partie A Etude et tracé de $(\mathcal{C}_n)$

1) a) • Parité de $f_n$

$D_{f_n} = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $-x \in \mathbb{R}$

$f_n(-x) = \dfrac{(-x)^n}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = f_n(x)$ si $n$ pair

$f_n(-x) = \dfrac{-x^n}{\sqrt{x^2+1}} = -f_n(x)$ si $n$ impair

$f_n$ est paire si $n$ pair et $f_n$ est impaire si $n$ impair. 0,25

• Montrons que $f_n$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^2+1$ sont derivables sur $\mathbb{R}$, de plus $x^2+1>0$ donc $f_n$ est derivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}((n-1)x^2+n)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ 0,25

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ on a $(n-1)x^2+n>0$ et $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}>0$

donc $f_n'(x)$ est de signe de $x^{n-1}$

Ainsi $\forall x \geq 0$ $f_n'(x) \geq 0$ et $f_n$ est croissante ou strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. 0,25

La fonction $f_n$ étant pair si $n$ pair et impaire si $n$ impair 0,25

on en deduit que: $f_n$ est decroissante sur $\mathbb{R}^-$ si $n$ pair car $(C_n)$ doit être symetrique par rapport à l'axe

si $n$ impaire car l'origine du repere est centre de symetrie de $(C_n)$.

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$, $n \geq 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Si $n=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$ 0,25

car $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

Si $n>1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$ 0,25

pour $n>1$ $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^n}{x\sqrt{x^2+\frac{1}{9}}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{n-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

Si $n=2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = 1$ 0,25

Si $n>2$ ou $n \geq 3$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$ 0,25

#### Les branches infinies

• Si $n=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$ donc la droite $y=1$ est A.H. pour $(C_1)$ 0,25

• Si $n=2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = 1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - x =$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim \dfrac{x(x-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$

$\lim x\,(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\lim \frac{x\,(x^2-x^2-1)}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}\,(1+\sqrt{x^2+1})} = \lim_{+\infty} \frac{-x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,(x+\sqrt{x^2+1})} = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$$

La droite $(\Delta)$ $y = x$ est une asy. pour $(C_2)$ en $+\infty$. 0,25

Si $n > 2$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$ et $(C_n)$ admet une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{j})$.

• Tableau de variation de $f_1$ 0,25

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_1'$ | | $+$ | |
| $f_1$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

• Tableau de variation de $f_n$ avec $n$ pair.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

0,25

• Tableau de variat de $f$ avec $n$ imp

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(6) d) Points fixes des $(C_n)$

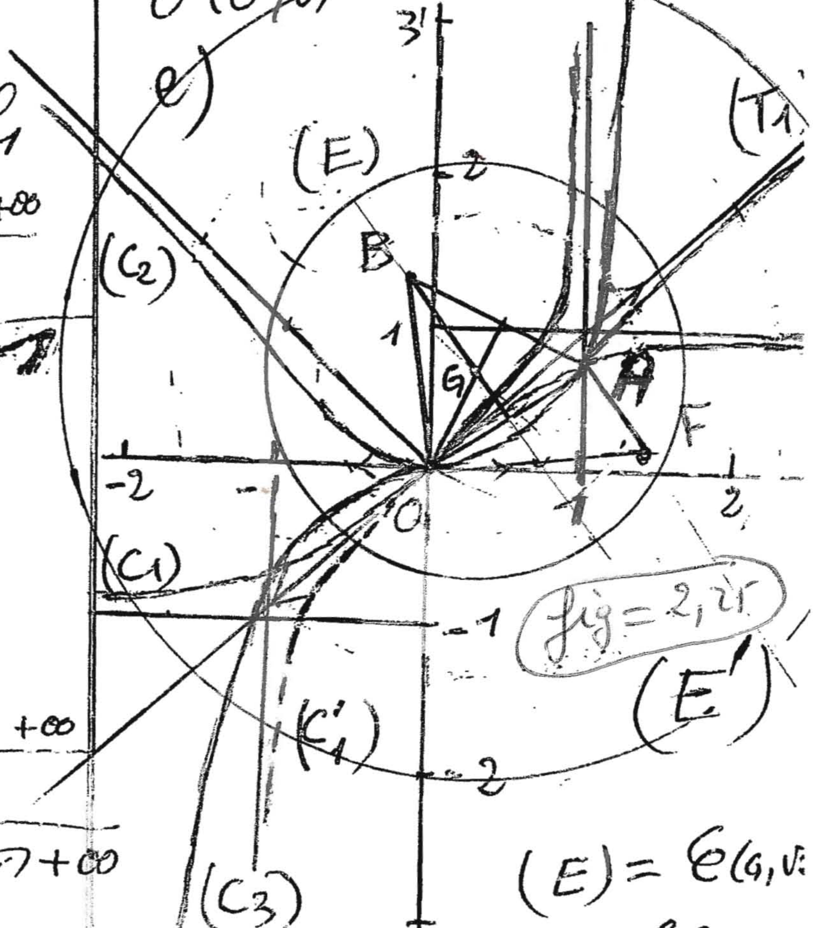
$$f_n(x) = f_{n+1}(x) \Leftrightarrow \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\Rightarrow x^{n+1} - x^n = 0 \Leftrightarrow x^n(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ de plus $\forall n \geq 1$ $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc les courbes $(C_n)$ passent par deux points fixes $O(0;0)$ et $A(1; \frac{\sqrt{2}}{2})$. 0,25

e)




$(E) = \mathcal{E}(G, \sqrt{\ldots}$

$(T_r)$ $y = x$ $(E') = \mathcal{E}(G; 2\sqrt{2}, \ldots$

$(C'_1)$ est le symétrique de $(C_1)$ par rapport à la droite d'équation $y = \ldots$

(E) →
(E') →
$(C'_1)$ → 0,25 Autres → 1

2°a) $f_1$ est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f_1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = ]-1;1[$, ainsi $f_1$ admet une bijection réciproque $f_1^{-1}$ définie sur $K = ]-1;1[$. 0,25

b) $(C_1')$ est le symétrique de $(C_1)$ par rapport à la droite $(\Delta)$ $y = x$

c) Soit $y \in ]-1;1[$ résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_1(x) = y$ on a :

$f_1(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = y \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = y^2$

car $x$ et $y$ ont même signe.

$\Leftrightarrow x^2 = y^2x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2(1-y^2) = y^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \Leftrightarrow |x| = \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ d'où 0,25

$\forall x \in ]-1;1[ \quad f_1^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

## Partie B 3,5

1° $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad n \in \mathbb{N}$

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 0,25

les fonctions $x \mapsto x^2+1$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car $x^2+1>0$. De plus $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ et $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f_0(x)$

donc $f$ est une primitive de $f_0$.

b°) $I_0 = \int_0^1 f_0\,dx = [f]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$ 0,25

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$ 0,25

$I_1 > 0$ et $I_1$ est l'aire en u.a de la partie du plan limitée par $(C_1)$ l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites $x=0$ et $x=$ 0,25

c) Mq $\forall n \geq 2 \quad nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}$

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 x^{n-1} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$= \left[x^{n-1}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}\,dx$

$= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 x^{n-2} \times \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \left(\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$= \sqrt{2} - (n-1)(I_n + I_{n-2})$

$I_n + (n-1)I_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}$

d'où $\boxed{nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}}$ 0,5

$2I_2 = \sqrt{2} - I_0 = \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})$

donc $\boxed{I_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))}$ 0,25

$3I_3 = \sqrt{2} - 2I_1 = \sqrt{2} - 2(\sqrt{2}-1)$

$3I_3 = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$ 0,25

donc $\boxed{I_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}}$

d) Mq $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \geq$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq$

$\forall x \in [0;1]$

par intégration sur $[0;1]$ on a.

$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+1}} \leq \int_0^1 x^n\,dx \Rightarrow$