COLLEGE LYCEE RAPONDA WALKER
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

BACCALAUREAT BLANC
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SERIE C
Durée: 4 h
Coef : 4

EXERCICE 1

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1 \quad [2003]$

c. Montrer que, pour tout entier relatif x ,
$123x \equiv 456 \quad [2003]$ si seulement si $x \equiv 456k_0 \quad [2003]$.

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456 \quad [2003]$

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :
$1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456 \quad [2003]$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

a. Déterminer : $\text{PGCD}(a\,;\,2003)$

En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1 \quad [2003]$.

b. Montrer que, pour tout entier b , il existe un unique entier x tel que :
$0 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b \quad [2003]$.

EXERCICE 2

On considère dans le plan (P) un cercle de diamètre $[OB]$.

Soit A un point du segment $[OB]$, distinct de O et de B, I le milieu de $[AB]$.

$(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$

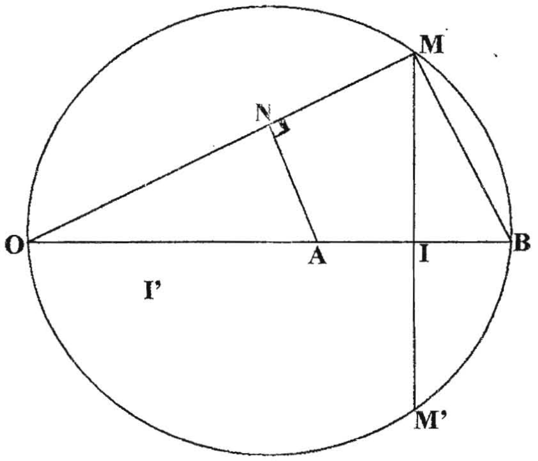
La médiatrice du segment $[AB]$ coupe le cercle en M et M' tels qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MB})$ soit $+\frac{\pi}{2}$. Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).

(AM')

1. Donner la nature du quadrilatère AMBM'. E n déduire que la droite (AM') est orthogonale à (OM) et que N, A, et M' sont alignés.

2. On appelle S la similitude plane directe de centre N, telle que $S(M) = A$.
Préciser l'angle de cette similitude. Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA).
En déduire l'image par S du point M'.

3. Montrer que l'image par S de I est le point I', milieu de $[OA]$. En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.



PROBLEME

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$ puis, dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

PARTIE A

1. On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = x - e^{x-1}$.

a. Etablir les variations de g (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de g). Calculer $g(1)$ et montrer que, pour tout x réel, $g(x) \leq 0$.

b. En déduire que pour tout x réel $xe^{-x} \leq \dfrac{1}{e}$, puis $1 - xe^{-x} > 0$.

2. On désigne par f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{1}{1 - xe^{-x}}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : 3 cm).

a. Vérifier que f est définie sur IR. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

c. Ecrire une équation une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

d. Tracer (T), puis (C) (on admettra que (C) est au-dessus de (T) pour $x < 0$, et au-dessous pour $x > 0$).

3. a. Déterminer les images par f des intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout x positif ou nul : $1 \leq f(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$.

PARTIE B

1. Donner une interprétation géométrique du nombre $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Soit n un entier naturel non nul , et soit $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx}\,dx$.

a. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $J_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$.

b. On se propose de calculer J_2 sans utiliser des intégrations par parties : déterminer les coefficients a, b, et c tels que la fonction H définie par $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive de $h(x) = x^2 e^{-2x}$.

En déduire $J_2 = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{5}{e^2}\right)$.

3. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $u_n = 1 + J_1 + J_2 + \ldots + J_n$.

a. Montrer que, pour tout réel x : $1 + xe^{-x} + x^2 e^{-2x} + \ldots + x^n e^{-nx} = \dfrac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}$.

b. En déduire que : $I - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x)\,dx$.

c. En utilisant PARTIE A.1.b., montrer que pour tout x positif ou nul : $0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} \leq \dfrac{1}{e^{n+1}}$.

En déduire que pour tout x positif ou nul : $0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \dfrac{1}{e^n (e-1)}$.

d. En déduire un encadrement de $I - u_n$; étudier la convergence de la suite de terme général u_n.

4. Montrer que $u_2 \leq I \leq u_2 + \dfrac{1}{e^2(e-1)}$

Sachant que $u_2 = 1 + J_1 + J_2$, trouver deux nombres décimaux d_1 et d_2 tels que $0 < d_2 - d_1 < 10^{-1}$ et $d_1 < I < d_2$

BAC BLANC MATH SERIE C.

EXERCICE 1 : 5 points.

1 a. Déterminer deux entiers relatifs u et v / $123u + 2003v = 1$

Algorithme d'Euclide :

$2003 = 123 \times 16 + 35$

$123 = 35 \times 3 + 18$

$35 = 18 \times 1 + 17$

$18 = 17 \times 1 + 1$

$(2003 \wedge 123 = 1)$.

Détermination de $(u ; v)$:

$18 - 17 \times 1 = 1$

$18 - (35 - 18 \times 1) = 1$

$(123 - 35 \times 3) \times 2 - 35 = 1$

$123 \times 2 - 35 \times 7 = 1$

$123 \times 2 - (2003 - 123 \times 16) \times 7 = 1$

$114 \times 123 - 7 \times 2003 = 1$.

d'où $u = 114$ et $v = -7$ 0,75pt

b. d'après a/ $123 \times 114 = 1 + 7 \times 2003$ donc $123 \times 114 \equiv 1 \ [2003]$

$k_0 = 114$ 0,5pt

c. $123x \equiv 456 \ [2003] \Leftrightarrow 123x \times 114 \equiv 456 \times 114 \ [2003]$

$(\text{PGCD}(114 ; 2003) = 1)$

$\Leftrightarrow 14\,022\, x \equiv 456 k_0 \ [2003] \Leftrightarrow x(7 \times 2003 + 1) \equiv 456 k_0$

$\Leftrightarrow x \equiv 456 k_0 \ [2003]$ 0,75pt

d. $123x \equiv 456 \ [2003]$ $\Leftrightarrow x \equiv 456 k_0 \ [2003]$

$\Leftrightarrow x \equiv 51\,984 \ [2003]$

$\Leftrightarrow x \equiv 1\,909 \ [2003]$.

$S = \{2003k + 1909 \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$. 0,5pt

e. $123x \equiv 456 \ [2003]$ et $1 \leq x \leq 2002$

$\Leftrightarrow x = 2003k + 1909$ et $\frac{1 - 1909}{2003} \leq k \leq \frac{2002 - 1909}{2003}$

$\Leftrightarrow x = 2003k + 1909$ et $k = 0$. $S = \{1909\}$. 0,75pt

2 a. Nous avons : $1 \leq a \leq 2002$ et 2003 nombre premier

donc $\text{PGCD}(a ; 2003) = 1$ 0,5pt

D'après le théorème de Bézout il existe deux entiers relatifs m et p tels que : $ma + 2003p = 1$.

donc il existe un entier m : $ma \equiv 1 \ [2003]$. 0,5pt

b. Montrer que, pour tout entier b, $\exists! \, x \in \mathbb{N} \ / \ 0 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b \ [2003]$.

* De $am \equiv 1 \ [2003]$ on a $amb \equiv b \ [2003]$.

Si $ax \equiv b \ [2003]$ on obtient alors $a(x - mb) \equiv 0$ modulo 2003, Or $a \wedge 2003 = 1$. D'après le théorème de Gauss. $x - mb \equiv 0 \ [2003]$ et puis $x \equiv mb \ [2003]$. Désignons par r le reste de la division euclidienne de mb par 2003 $(0 \leq r \leq 2002)$ comme $0 \leq x \leq 2002$. On peut prendre $x = r$.

* Unicité de la solution : Soit x_1 et x_2 deux solutions :

$\begin{cases} ax_1 \equiv b \\ ax_2 \equiv b \end{cases} [2003]$ et $\begin{matrix} 0 \leq x_1 \leq 2002 \\ 0 \leq x_2 \leq 2002. \end{matrix}$ donc $a(x_2 - x_1) \equiv 0 \ [2003]$ 0,75pt

D'après le théorème Gauss $x_2 - x_1 = 2003k'$ $(k' \in \mathbb{Z})$

car $a \wedge 2003 = 1$.

Or $-2002 \leq x_2 - x_1 \leq 2002$, donc $-\frac{2002}{2003} \leq k' \leq \frac{2002}{2003}$

$\Rightarrow k' = 0. \Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$.

EXERCICE 2 : 4,5 points.

1. * AMBM' est un losange. En effet : M' est le symétrique de M par rapport à (OB), les diagonales du quadrilatère AMBM' se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. 0,5pt

* $(MB) \perp (OM)$ et $(AM') \parallel (MB)$ donc $(AM') \perp (OM)$. 0,25pt

* $(NA) \perp (OM)$, $(AM') \perp (OM)$, $A \in (NA) \cap (AM')$ donc les droites (NA) et (AM') sont confondues : N, A et M' alignés. 0,25pt

2. * Angle de S :
on a : $S(N) = N$ et $S(M) = A$.
angle de $S = mes(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NA}) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. 0,5pt

* image de la droite (MI) :
On a : $S(M) = A$ et l'angle de S est $(-\frac{\pi}{2})$.
l'image de (MI) est la droite perpendiculaire à (MI) et passant par A : (OB). 0,75pt

* image de la droite (NA).
$S(N) = N$. L'image de (NA) est la perpendiculaire à (NA) passant par N : (OM). 0,75pt

* déduire S(M').
$\{M'\} = (MI) \cap (NA)$ donc $\{S(M')\} = (OB) \cap (OM) = \{O\}$.
$S(M') = O$. 0,5pt

3. I milieu de [MM'] en posant $S(M) = A$, $S(M') = O$ et $S(I) = I'$ et comme une similitude directe conserve le barycentre (milieu) donc I' est milieu de [OA]. 0,5pt

$S(N) = N$ et $S(I) = I'$ donc $(NI) \perp (NI')$
I' milieu de [OA], $(NA) \perp (ON)$
I' est le centre du cercle de diamètre [OA].
en conclusion (NI) est tangent à ce cercle en N. 0,5pt

PROBLÈME : 10,5 points

PARTIE A.

1 a. Variations de g : $g(x) = x - e^{x-1}$

* $g'(x) = 1 - e^{x-1}$
  $g'(x) \geq 0 \iff x \leq 1$
  $g(1) = 0$.

g est croissante sur $]-\infty, 1[$
g est $\searrow$ sur $]1, +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

* $g(1) = 0$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq 0$ — 1pt

b. * $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et d'après a/ $x - e^{x-1} \leq 0$
donc $\frac{1}{e^x}(x - e^{x-1}) \leq 0 \iff x e^{-x} - e^{-1} \leq 0 \iff x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$. — 0,5pt

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e} < 1$ donc $x e^{-x} < 1$
$\iff 1 - x e^{-x} > 0$ — 0,25pt

2 a. $f(x) = (1 - x e^{-x})^{-1}$
la fonction $x \mapsto 1 - x e^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$
De plus $1 - x e^{-x} \neq 0$ (car $1 - x e^{-x} > 0$) donc $D_f = \mathbb{R}$. — 0,25pt

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ — 0,5pt

b. $f'(x) = \dfrac{(1 - x) e^{-x}}{(1 - x e^{-x})^2}$

f est décroissante sur $[1 ; +\infty[$
f est croissante sur $]-\infty ; 1]$.
$f(1) = \dfrac{1}{1 - e^{-1}} = \dfrac{e}{e-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

— 1pt

c. (T) : $y = x + 1$ — 0,25pt

d. Tracer (T) et (C). — 0,5pt

3. a. la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (continue sur $\mathbb{R}$)
f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ donc $f([0 ; 1]) = [f(0), f(1)]$
$= [1 ; \frac{e}{e-1}]$ — 0,5pt
de même $f([1 ; +\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) ; f(1)]$ car f est $\searrow$
$=]1 ; \frac{e}{e-1}]$.

b. D'après ce qui précède :
$f([0 ; +\infty[) = [1 ; \frac{e}{e-1}]$. — 0,25pt
d'où : $\forall x \in [0 ; +\infty[$ $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$

PARTIE B.

5,5 pt

1. $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ ($f(x) > 0$ et $0 < 1$) donc $I > 0$.
I est alors l'aire en u.a de $\mathcal{D} = \{M(x,y) / 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq f(x)\}$ — 0,25pt

2. a. $J_1 = \int_0^1 x e^{-x}\,dx = [x(-e^{-x})]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$. — 0,5pt

b. $H'(x) = (2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c)e^{-2x} = x^2 e^{-2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2a + 2a = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = -1/2 \\ c = -1/4 \end{cases} \Rightarrow H(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}.$$ — 0,5pt

$J_2 = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\left[(x^2+x+\frac{1}{2})e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(\frac{5}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(1-\frac{5}{e^2})$ 0,25pt

3 a. $1 + xe^{-x} + x^2e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = 1 + xe^{-x} + (xe^{-x})^2 + \dots + (xe^{-x})^n$ 0,5pt

(termes consécutifs d'une S.G de raison xe^{-x}). $= \frac{1-(xe^{-x})^{n+1}}{1-xe^{-x}}$ ($1-xe^{-x}$ est bien $\neq 0$)

b. A-t-on $I - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)} f(x)\,dx$?

on a : $I - u_n = \int_0^1 f(x)dx - \left(\int_0^1 dx + \int_0^1 xe^{-x}dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx}dx\right)$ 0,5pt

$= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 (1 + xe^{-x} + \dots + x^n e^{-nx})dx$ (par linéarité)

$= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 \frac{1 - x^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1-xe^{-x}}dx$

$= \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x)\,dx$ (par linéarité).

c. Sur $[0,+\infty[$ $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$ et $x \mapsto x^n$ est strictement croissante

donc $(xe^{-x})^{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$, $x^{n+1}e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^{n+1}}$ 0,5pt

De plus $0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x}$ sur $[0,+\infty[$.

D'où pour $x \geq 0$ $0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^{n+1}}$.

de $\begin{cases} 0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^{n+1}} \\ 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1} \end{cases}$ et en faisant le produit membre à membre on obtient 0,5pt

$0 \leq x^{n+1}e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$

d. Par intégration sur $[0,1]$.

on a alors : $0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}(1-0)$ 0,5pt

$\Rightarrow 0 \leq I - u_n \leq v_n$ avec $v_n = \frac{1}{e^n(e-1)}$

la suite (v_n) est convergente et c.v vers 0.

et comme $I - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite $(I-u_n)$ est alors convergente et converge vers 0. 0,5pt

en conclusion la suite (u_n) est convergente et converge vers I.

4. * Comme $0 \leq I - u_n \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$, alors en particulier pour $n = 2$ $0 \leq I - u_2 \leq \frac{1}{e^2(e-1)}$ 0,5pt

donc $u_2 \leq I \leq u_2 + \frac{1}{e^2(e-1)}$.

* Détermination de d_2 et d_1. 0,5pt

On a : $u_2 = 1 + J_1 + J_2 = 1 + 1 - \frac{2}{e} + \frac{1}{4}(1 - \frac{5}{e^2}) \simeq 1{,}345$

$d_1 = 1{,}34$ et $d_2 = 1{,}43$.