BAC C GABON session 96

3

EXERCICE I (5 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 2n. On y trouve :

1 boule portant le numéro 1
2 boules portant le numéro 2
2^2 boules portant le numéro 3
2^3 boules portant le numéro 4
etc, et enfin :
2^{2n-1} boules portant le numéro 2n.

Partie 1-.

1°) On appelle N le nombre de boules contenues dans l'urne, montrer que $N = 4^n - 1$ et que c'est un multiple de 3.

2°) On désigne par I le nombre de boules portant un numéro impair, et par P le nombre de boules portant un muméro pair.

a) Montrer que $I = \dfrac{4^n - 1}{3}$

b) Exprimer alors I en fonction de N et montrer que $P = 2I = \dfrac{2N}{3}$

Partie 2-.

On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne et on désigne par X le nombre de boules tirées portant un numéro pair.

1°) Donner en fonction de N, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2°) Calculer son espérance mathématique et vérifier qu'elle ne dépend pas de N.

Partie 3-.

On suppose maintenant que $100 \leq I \leq 1000$.

1°) Quel est le plus grand numéro porté par les boules.

2°) On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité pour que cette boule porte un numéro supérieur ou égal à 8.

EXERCICE II (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique un centimètre. On désigne par f l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z^2 - 2z$..

1°) a) Déterminer les points du plan ayant pour image les point A d'affixe -4.

b) Ecrire les affixes des points obtenus sous forme trigonométrique.

2°) On note (x, y) les coordonnées du point M et (x', y') celles de son image M' par f. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

3°) a) Etablir que l'ensemble (H) des points M dont les images M' appartiennent à l'axe des ordonnées est une hyperbole dont on précisera les sommets, les axes, les foyers et les asymptotes.

b) Construire (H) avec soin.

4°) a) Etablir que l'image de l'axe des ordonnées par f est la parabole (Γ) d'équation $y^2 = -4x$.

b) Construire (Γ) avec soin.

PROBLEME (11 points)

Partie A:

1°) (E_o) désigne l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_o)

2°)(E) est l'équation différentielle $y'' + 2y' = y = 2e^{-x}$.

a) Vérifier que la fonction h définie sur IR par $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

b) Montrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est une solution de (E_o).

c) Déterminer toutes les solutions de (E)

d) Déterminer la solution f_o de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f_o(0) = 4$ et $f_o'(0) = 0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x + 2)^2 e^{-x}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique un centimètre.

1°) Etudier les variations de f et tracer (C) avec soin.

2°) En remarquant que f est solution de l'équation différentielle (E), déterminer une primitive F de f sur IR

(On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t)\,dt$).

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^n f(t)\,dt$.

a) Exprimer I_n en fonction de n et en donner une interprétation graphique.

b) Etudier la convergence de la suite (I_n) puis en déduire que le domaine plan illimité des points M (x, y) où $0 \leq x$ et $0 \leq y \leq f(x)$, a une aire que l'on précisera.

Partie C :

On se propose d'étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{1}{n^3}\left[(1+2n)^2 e^{-\frac{1}{n}} + (2+2n)^2 e^{-\frac{2}{n}} + \dots + (n+2n)^2 e^{-\frac{n}{n}}\right]$$
$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+2n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$$

1°) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e-9}{ne}$$

2°) Etablir que pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

3°) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a $u_n \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq u_n + \dfrac{4e-9}{ne}$.

4°) En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a $I_1 - \dfrac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$.

5°) Etudier alors la convergence de la suite u puis préciser sa limite.