

**CORRIGE ET GRILLE DE CORRECTION
DE
L'EPREUVE DE MATHÉMATIQUES DE LA SÉRIE A1
SESSION 2016**

Exercice 1 : Suites numériques (5 points)

1. a) Calcul de u_1 et u_2 .

$$u_1 = 2 \text{ et } u_2 = \frac{6}{5}.$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
1.a)	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 1pt
		Calcul de u_1 avec réponse correcte	0,5	
		Réponse plaquée ou démarche incomplète	0,25	
		Calcul de u_2 avec réponse correcte	0,5	
		Réponse plaquée ou démarche incomplète	0,25	

b) $u_1 - u_0 = -4$ et $u_2 - u_1 = -\frac{4}{5}$; $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{5}; \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \text{ donc } (u_n) \text{ n'est pas géométrique.}$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
1.b)	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,25	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes ou réponse plaquée	0	
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,25	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes ou réponse plaquée	0	

2. a) $v_0 = 5$ et $v_1 = 1$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
2.a)	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Calcul de v_0 ou réponse plaquée	0,25	
		Calcul de v_1 ou réponse plaquée	0,25	

$$b) v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(u_n - 1) = \frac{1}{5}v_n.$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
2.b)	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,25	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0	
		Résultat plaqué	0	
	Conclusion	Cohérente avec sa démarche	0,25	

3. a) Pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 \times q^n = 5 \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{et} \quad u_n = v_n + 1 = 5 \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1.$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
3.a)	Expression de v_n	Ne traite pas la question	0	.../ 0,75pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes ou formule	0,25	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0	
		Réponse plaquée	0	
	Expression de u_n	Ne traite pas la question	0	
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,5	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,25	
		Réponse plaquée	0,25	

$$b) \quad A_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right].$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (v_1 + 1) + (v_2 + 1) + \dots + (v_n + 1) = A_n + n = n + \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right].$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
3.b)	Expression de A_n	Ne traite pas la question	0	.../ 1pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,5	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes ou formule	0,25	
		Résultat plaqué	0	
	Expression de S_n	Ne traite pas la question	0	
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,5	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,25	
		Résultat plaqué	0	

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \quad \text{car} \quad 0 < \frac{1}{5} < 1; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right] = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{5}{4}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty \quad \text{et comme} \quad S_n = n + A_n, \quad \text{on a :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
3.c)	Limite de A_n	Ne traite pas la question	0	.../ 0,75pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes ou quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,25	
		Résultat plaqué	0,25	
	Limite de S_n	Ne traite pas la question	0	
		Claire et structuré dans toutes les étapes ou quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,5	
		Résultat plaqué	0,25	

Exercice 2 : Etude d'une fonction comportant ln (6 points)

1. Limite de f en 0 et interprétation graphique : $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + 10x - 9) = -9 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (-8 \ln x) = +\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = +\infty.$$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe (C).

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
1.	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 0,75pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,5	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,25	
		Résultat plaqué	0,25	
	Interprétation	N'interprète pas	0	
		Cohérente avec le résultat obtenu	0,25	

2. a) Vérification : Pour tout $x > 0$, on a :

$$x^2 \left(-1 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{8 \ln x}{x^2} \right) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x = f(x).$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
2.a)	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,5	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,25	
		Résultat plaqué	0,25	

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2} - 8 \frac{\ln x}{x^2} \right) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
2.b)	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,5	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,25	
		Résultat plaqué	0,25	
		Résultat plaqué	0,25	

3. Dérivée

$$f'(x) = -2x + 10 - \frac{8}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x} = \frac{-2(x^2 - 5x + 4)}{x} = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération		
3.	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../1pt	
		Calcul de $f'(x)$	Claire et structuré dans toutes les étapes		0,5
			Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes		0,25
		Transformation	Claire et structuré dans toutes les étapes		0,5
			Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes		0,25

4. Signe de $f'(x)$ pour tout $x > 0$

$x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-2(x-1)(x-4)$. On obtient :

x	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0
			-	

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
4.	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,5	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,25	
		Résultat plaqué	0,25	

5. Tableau de variations

$f(1) = -1 + 10 - 9 - 8 \ln 1 = 0$ et $f(4) = -16 + 40 - 9 - 8 \ln 4 = 15 - 16 \ln 2$

x	0	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$			$15 - 16 \ln 2$		$-\infty$

\swarrow \searrow \nearrow \searrow
 0

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
5.	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 1pt
		Calcul de $f(1)$	0,25	
		Calcul de $f(4)$	0,25	
		Tableau complet avec extremums calculés ou non	0,5	
		Tableau incomplet ou cohérent avec le signe de sa dérivée	0,25	

6. a) Tableau de valeurs

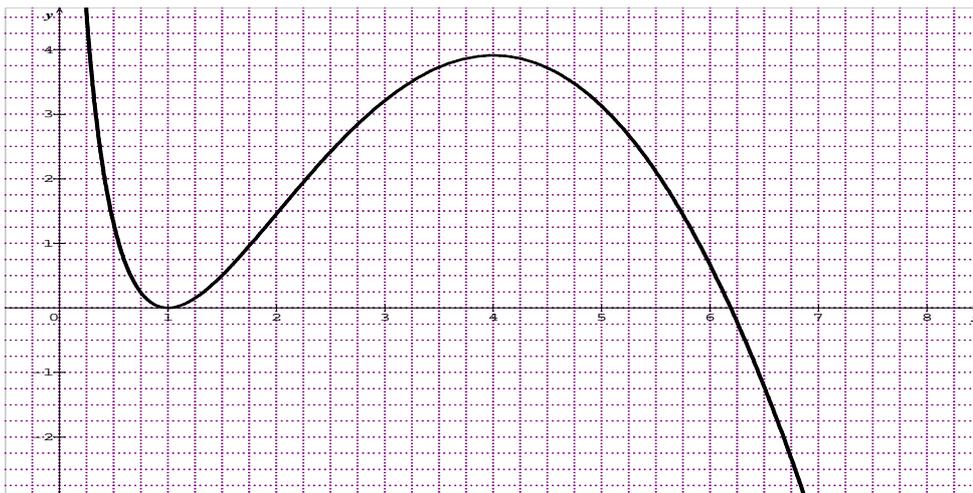
x	6,18	6,19	6,20	6,21
$f(x)$	0,0371	0,0004	-0,0364	-0,0734

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
6 a)	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 0,75pt
		Recopie le tableau	0,25	
		Tableau complet	0,5	
		Au moins deux valeurs	0,25	
		Au plus une valeur	0	

b) $6,19 < \alpha < 6,20$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
6 b)	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 0,25pt
		Donne l'encadrement	0,25	

7. Représentation graphique

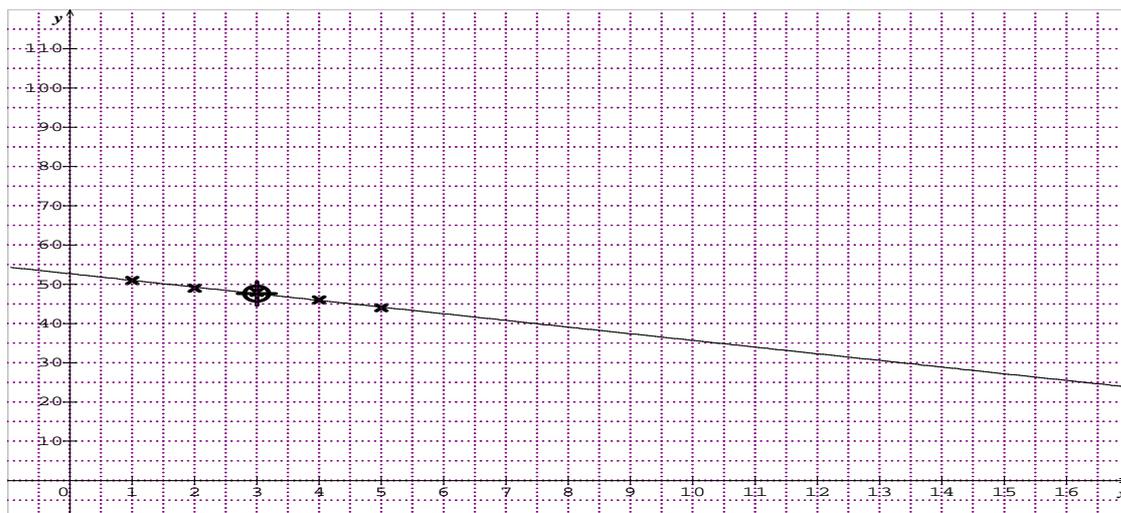


Question	Critères d'évaluation		Pondération	
7	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 1pt
		Repère correct	0,25	
		Traite correctement la question	0,5	

Problème : Statistiques et probabilités conditionnelles (9 points)

Partie A : Dans le club littéraire (5 points)

1. a) Nuage des points



Question	Critères d'évaluation		Pondération	
1.a)	Nuage	Ne traite pas la question	0	.../ 0,75pt
		Repère correct	0,25	
		Au moins deux points représentés	0,25	
		Nuage complet	0,5	

b) Coordonnées du point moyen : On obtient $G(3 ; 47,6)$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
1.b)	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 0,75pt
		Calcul de \bar{x} (avec ou sans formule)	0,25	
		Calcul de \bar{y} (avec ou sans formule)	0,25	
		Représentation de G	0,25	

c) Oui car les points semblent alignés.

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
1.c)	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Réponse « oui » sans justification ou mauvaise justification	0,25	
		Réponse « oui » avec justification correcte	0,5	
		Réponse non » avec ou sans justification	0	

2. a) Equation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés.

Une équation cartésienne de cette droite est : $y = ax + b$ où :

$$a = \frac{\text{cov}(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} \text{ avec : } \text{cov}(X;Y) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i y_i - (\bar{x} \times \bar{y}) \text{ et } V(X) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55 ; \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 11\,358 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 697.$$

On alors : $\text{cov}(X;Y) = -3,4$; $V(X) = 2$; $a = -1,7$ et $b = 52,7$ et donc $y = -1,7x + 52,7$.

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
		Ne traite pas la question	0	
2.a)	Calcul	Covariance de X et Y	0,5	.../ 2,25pt
		Variance de X	0,5	
		Valeur de a (peu importe l'arrondi)	0,5	
		Valeur de b	0,5	
	Résultat	Correct ou conforme aux calculs	0,25	
Plaqué à l'aide de la calculatrice		2,25		

b) Pour le tracé, voir le graphique précédent.

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
2.b)	Tracé	Ne traite pas la question	0	.../ 0,25pt
		Tracé conforme à l'ajustement trouvé précédemment	0,25	

c) Le mois de décembre 2016 correspond au rang $x = 12$ soit :
 $y = -1,7 \times 12 + 52,7 = 32,3$.

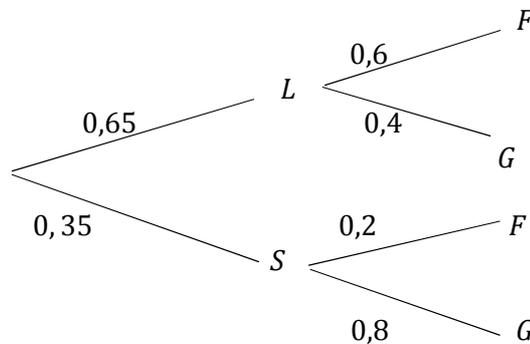
Interprétation : Le nombre de membres que le club littéraire peut estimer avoir au mois de décembre 2016 est de 32 personnes.

NB : On pourra accepter une réponse avec 33 personnes.

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
2.c)	Calcul	Ne traite pas la question	0	.../ 0,5pt
		Résultat conforme à l'ajustement trouvé précédemment ou par lecture graphique	0,25	
	Interprétation	Correcte	0,25	
		Incorrecte ou pas d'interprétation	0	

Partie B : Dans les deux clubs (4 points)

1. Arbre pondéré



Question	Critères d'évaluation		Pondération	
1.	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 1,25pt
		Reproduit l'arbre	0,25	
		Arbre complet (0,25 par valeur)	1	

2. Probabilité de « L'élève choisi est une fille et est dans le club L » : événement " $F \cap L$ "

$$p(F \cap L) = 0,6 \times 0,65 = 0,39$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
2.	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 0,75pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	0,75	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,5	
		Résultat plaqué	0	

3. Calcul de la probabilité de F

$$p(F) = p(L \cap F) + p(S \cap F) = 0,39 + 0,35 \times 0,8 = 0,46$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
3.	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 1pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	1	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,5	
		Résultat plaqué	0	

4. Calcul de la probabilité de « L sachant F »

$$p_F(L) = \frac{p(L \cap F)}{p(F)} = \frac{0,39}{0,46} = 0,85$$

Question	Critères d'évaluation		Pondération	
4.	Démarche	Ne traite pas la question	0	.../ 1pt
		Claire et structuré dans toutes les étapes	1	
		Quelque peu structuré et certaines étapes sont manquantes	0,5	
		Résultat plaqué	0	