INTERROGATION N° 13

EXERCICE I

On considère l'équation (E) :

$z^3 - (5+3i)z^2 + (6+11i)z - 10i = 0$,

où z désigne un nombre complexe.

1°) a) Démontrer que (E) admet une unique solution réelle z_1.

b) Résoudre l'équation (E). On notera z_2 la solution de (E) telle que $\mathcal{Re}(z_2) = z_1$ et z_3 la troisième solution.

2°) Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J), on appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Déterminer le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, − 2) et (C, 1).

b) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer le rapport, l'angle et le centre de S.

c) Calculer l'affixe du point C', image de C par S.

d) Sans aucun calcul, démontrer que le barycentre des points pondérés (B, 2), (C, − 2) et (C', 1) est le point I

EXERCICE II

Une urne contient 10 boules:
- cinq sont blanches et portent les numéros 1, 1, 1, 2, 4.
- trois sont noires et portent les numéros 1, 3, 5.
- deux sont rouges et portent les numéros 6, 6.

On suppose les tirages équiprobables.

1) Soit l'expérience ε qui consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

a) Calculer les probabilités des événements suivant :

E_1: les deux boules ont la même couleur.

E_2: les deux boules sont de couleur différentes.

E_3: les deux boules portent le même numéro.

b) Sachant que les deux boules ont la même couleur, calculer la probabilité qu'elles portent le même le numéro. Les événement E_1 et E_3 sont-ils indépendants ?

2) On suppose maintenant que chaque boule tirée portant un numéro impair fait gagner 5F et chaque boule tirée portant un numéro pair fait gagner 10F. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage simultané de deux boules la somme des gains.

a) Déterminer la distribution de la variable aléatoire X.

b) Quelle est l'espérance mathématique de X ?

PROBLEME

L'objet du problème est de démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$$

1°) Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2°) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_o = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{cases}$$

a) Déduire du 1°) que la suite u est majorée par 3.

b) Démontrer que la suite u est convergente, sans chercher à calculer sa limite.

Partie B:

On considère la fonction f_o de IR vers IR définie par:

$f_o(x) = e^{-x}$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n de IR vers IR définie par :

$f_n(x) = x^n e^{-x}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 4 cm), on désigne par (C_o) et (C_n) les représentations graphiques respectives de f_o et f_n.

1°) Etudier les variations de f_0 et f_1. Préciser la position de (C_o) par rapport à (C_1). Construire les courbes (C_o) et (C_1) sur une même figure (prendre e = 2,7 et $e^{-1} = 0{,}37$).

2°) Etudier les variations de f_n pour $n \geq 2$, en distinguant deux cas suivant la parité de n.

3°) Construire les courbes (C_2) et (C_3) sur une autre figure que la figure du 1°).

Partie C:

Pour tout nombre entier naturel n, on considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$

1°) Calculer $F_o(x)$ et $F_1(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+$. Calculer ensuite $\lim_{x \to +\infty} F_o(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} F_1(x)$.

2°) Démontrer que:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F_n(x) = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x)$.

Partie D.

Le but de cette dernière partie est de calculer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la partie A.

1°) a) Démontrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$$

b) En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} u_n.$$

2°) a) Démontrer que:

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,1] \quad 0 \leq f_n(t) \leq e^{-1}$.

b) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq F_n(1) \leq e^{-1}$.

3°) Déduire des résultats des questions précédentes la limite lorsque n tend vers l'infini de :

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Correction interrogation n° 13

EXERCICE I

1°) a) z_1 est solution réelle de (E) ssi $\begin{cases} z_1^3 - 5z_1^2 + 6z_1 = 0 \\ -3z_1^2 + 11z_1 - 10 = 0 \end{cases}$ d'où $z_1 = 2$

b) (E) <=> $(z - 2)[z^2 - (3 + 3i)z + 5i] = 0$

$\Delta = -2i = (1 - i)^2$; $z_2 = 2 + i$; $z_3 = 1 + 2i$

2°) a) L'affixe du barycentre est $Z = 2z_1 - 2z_2 + z_3$ donc $Z = 1$. Le barycentre est donc le point I.

b) Première méthode:

$$k = \frac{BC}{AB} = \left|\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right| = |1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$$

Ω étant le centre de la similitude directe on doit donc avoir ΩAB isocèle rectangle et le triplet (Ω, A, B) direct on vérifie que $\Omega = I$ en montrant que

$\text{mes}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}$ et que $\frac{IB}{IA} = \sqrt{2}$.

Deuxième méthode: La relation complexe associée à S est de la forme $z' = az + b$,

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = C \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b = 2 + i \\ (2 + i)a + b = 1 + 2i \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 + i \\ b = -i \end{cases}$$

Donc S est associée à la relation $z' = (1 + i)z - i$

$k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $\theta = \arg(a) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$. L'affixe du centre Ω vérifie la relation $z = (1 + i)z - i$ donc $z = 1$ et $\Omega = I$.

S est donc la similitude directe de centre I, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c) $Z_{C'} = (1 + i)z_3 - i = -1 + 2i$. Donc C'(-1; 2).

d) S étant une application affine conserve le barycentre.

I est barycentre de (A, 2), (B, -2), (C, 1)

donc S(I) = I est barycentre de (B, 2), (C, -2), (C', 1).

EXERCICE II

1°) Une éventualité de Ω est un sous-ensemble de 2 éléments pris parmi 10 boules.

Donc card $\Omega = C_{10}^2 = 45$

L'événement E_1 se découpe en trois événements incompatibles deux à deux, A_1, A_2, A_3 ; où A1 est l'événement "tirer deux boules blanches parmi 5", A2 l'événement "tirer deux boules noires parmi 3" et A3 l'événement "tirer deux boules rouges parmi 2".

On a : card $A_1 = C_5^2 = 10$, card $A_2 = C_3^2 = 3$, card $A_3 = C_2^2 = 1$

et card E_1 = card A_1 + card A_2 + card A_3 = 14, donc $p(E1) = \frac{14}{45}$

L'événement E_2 est le contraire de l'événement E_1. On a donc $p(E_2) = 1 - p(E_1) = \frac{31}{45}$

L'événement E_3 se découpe en deux événements incompatibles B_1 et B_2, où B_1 est l'événement "tirer deux boules parmi les 4 numérotées 1" et B_2 l'événement, "tirer deux boules parmi les deux numérotées 6".

On a card $B_1 = C_4^2 = 6$ et card $B_2 = C_2^2 = 1$

donc card E_3 = card B_1 + card B_2 = 7 et $p(E_3) = \frac{7}{45}$

b) L'événement E_3 sachant E_1 est donné par $p_{E_1}(E_3) = \frac{p(E_1 \cap E_3)}{p(E_1)}$. Si on appelle C l'événement "tirer deux boules ayant le même numéro et la même couleur", nous aurons C qui se décompose en deux événements incompatibles, C_1 et C_2 où C_1 est l'événement tirer deux boules n° 1 parmi les 3 blanches et C_2 l'événement tirer deux boules n° 6 parmi les deux rouges. On a donc card $C_1 = C_3^2 = 3$ et card $C_2 = C_2^2 = 1$, card C = 4 et $p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{45}$

d'où $p_{E_1}(E_3) = \frac{p(E_1 \cap E_3)}{p(E_1)} = \frac{2}{7}$.

De plus $p(E_3) \neq \frac{2}{7}$ donc les événement E_1 et E_3 ne sont pas indépendants.

2°) $X<\Omega> = \{10, 15, 20\}$

α	10	15	20
$p(X=\alpha)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

La probabilité de gagner 10 F est celle de l'événement tirer deux boules portant un numéro impair donc tirer deux boules parmi les 6 numérotées impair. La probabilité de gagner 20 F est celle de l'événement tirer deux boules portant un numéro pair donc tirer deux boules parmi les 4 numérotées pair. La probabilité de gagner 15 F est celle de l'événement tirer une boule numérotée pair parmi les 4 et une boule numérotée impair parmi 6.

E(X) = 14.

PROBLEME

Partie A:

1°) Soit p(n) la proposition $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

- $\frac{1}{1!} = 1$ et $\frac{1}{2^0} = 1$ donc p(1) est vraie.
- Supposons p(n) vraie

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \iff 2^{n-1} \leq n!$

$\iff (n + 1)2^{n-1} \leq (n + 1)n!$ (α)

or $2 \leq n + 1$ car $n \geq 1$ donc

$(\alpha) \Rightarrow 2.2^{n-1} \leq (n + 1)!$

$\iff 2^n \leq (n + 1)!$

$\iff \frac{1}{(n + 1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

- On a donc : $\forall n \in IN^*$ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2°) a) $1 \leq 1$

$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$

$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$

$\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$

....

$\frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$

donc $u_n \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$

$u_n \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$u_n \leq 3$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n + 1)!}$. Donc (u_n) est croissante. Toute suite croissante et majorée est convergente. (u_n) est donc convergente.

Partie B:

1°) $f'_0(x) = -e^{-x}$ tableau de variations 1

$f'_1(x) = (1 - x)e^{-x}$ tableau de variations 2

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	$-$	
$f_0(x)$	$+\infty$ ↘	0

tableau 1

$f_1(x) - f_0(x) = (x - 1)e^{-x}$ donc

sur $]-\infty; 1[$ (C_1) est au-dessous de (C_0);

sur $]1; +\infty[$ (C_1) est au-dessus de (C_0)

Représentations graphiques de (C_0) et (C_1) sur fig 1

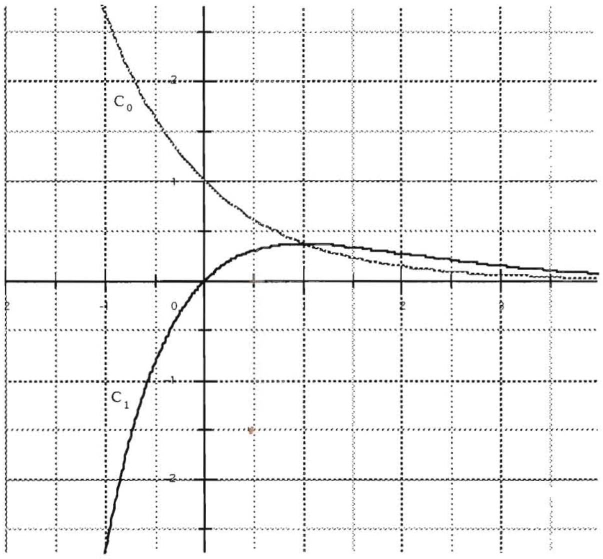
2°) $f'_n(x) = x^{n-1}(n - x)e^{-x}$

Tableau de variations 3 dans le cas où n est pair.

Tableau de variations 4 dans le cas où n est impair.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

tableau 2

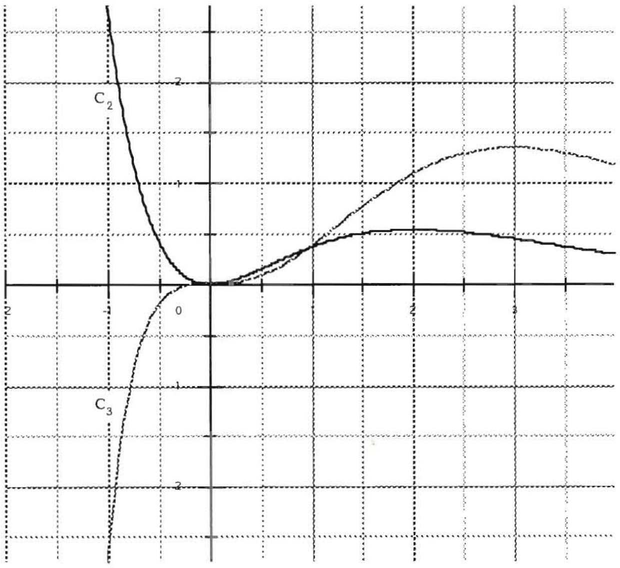


x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	n^ne^{-n}	$\searrow$	0

tableau 3

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	n^ne^{-n}	$\searrow$	0

tableau 4



3°) Courbes (C_2) et (C_3) sur la fig 2. Il est intéressant de vérifier que sur $]-\infty; 1[$ (C_3) est au-dessous de (C_2) et sur $]1; +\infty[$ (C_3) est au-dessus de (C_2)

Partie C:

1°) $F_0(x) = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$

$F_1(x) = \int_0^x t\,e^{-t}\,dt$ Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{-t}$

alors on a : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$ donc

$F_1(x) = [-t\,e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$

$F_1(x) = 1 - e^{-x} - x\,e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_0(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x) = 1$

2°) $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$ Posons $u(t) = t^n$ et $v'(t) = e^{-t}$

alors on a : $u'(t) = n\,t^{n-1}$ et $v(t) = -e^{-t}$ donc

$F_n(x) = [-t^n e^{-t}]_0^x - \int_0^x -n\,t^{n-1}e^{-t}\,dt$

$F_n(x) = -x^n e^{-x} + n\,F_{n-1}(x)$

Partie D.

1°) a) Pour $x = 1$, $F_n(1) = -e^{-1} + nF_{n-1}(1)$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$$

b)
$$\frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$$
$$\frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!} = -\frac{e^{-1}}{(n-1)!} + \frac{F_{n-2}(1)}{(n-2)!}$$
$$\frac{F_{n-2}(1)}{(n-2)!} = -\frac{e^{-1}}{(n-2)!} + \frac{F_{n-3}(1)}{(n-3)!}$$
....
$$\frac{F_2(1)}{2!} = -\frac{e^{-1}}{2!} + \frac{F_1(1)}{1!}$$
$$\frac{F_1(1)}{1!} = -\frac{e^{-1}}{1!} + \frac{F_0(1)}{0!}$$

$$\frac{F_n(1)}{n!} = -e^{-1}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!}\right) + \frac{F_0(1)}{0!}$$
$$= -e^{-1}u_n + 1$$

de plus $\frac{F_0(1)}{0!} = F_0(1) = 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1}u_0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1}u_n$.

2°) a) En étudiant les tableaux de variations 2, 3 et 4 on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est croissante sur $[0, 1]$ donc $\forall t \in [0,1]$ $f_n(0) \le f_n(t) \le f_n(1)$ c'est à dire
$0 \le f_n(t) \le e^{-1}$

b) Donc $\int_0^1 0\,dt \le \int_0^1 f_n(t)\,dt \le \int_0^1 e^{-1}\,dt$

c'est à dire que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \le F_n(1) \le e^{-1}$.

3°) $0 \le F_n(1) \le e^{-1} \iff 0 \le n!(1 - e^{-1}u_n) \le e^{-1}$

$\iff 0 \le e - u_n \le \frac{1}{n!}$

Or d'après la partie A 1°) on a $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ donc

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 \le e - u_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$

$\lim \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ d'où $\lim (e - u_n) = 0$ soit: $\lim u_n = e$