INTERROGATION N° 3 T.c

EXERCICE I

On considère la suite numérique (u) définie par : $u_o = 1$ et,

pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$.

1°) Déterminer un polynôme du premier degré, P(n), vérifiant la relation de récurrence

$$P(n+1) = \frac{1}{3}P(n) + n - 1$$

2°) Soit (v) la suite définie par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - P(n)$. Montrer que (v) est une suite géométrique.

2°) Calculer v_o puis calculer v_n en fonction de n.

En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n - 15}{4}$.

3°) Montrer que la suite (u) peut s'écrire sous la forme (u) = (t) + (w) où (t) est une suite géométrique et (w) une suite arithmétique.

4°) Calculer $T_n = t_o + t_1 + t_2 + ... + t_n$ et $W_n = w_o + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

En déduire $U_n = u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

EXERCICE II

On considère dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit A le point de coordonnées (1 , 0) et A' le point de coordonnées (- 1, 0).

1°) Par tout point H du segment [AA'], distinct de A et de A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'. On pose $\overline{OH} = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.

2°) Soit f la fonction numérique définie sur [-1, 1] par :

$$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

a) Etudier la dérivabilité de f en - 1 et en + 1.

b) Dresser le tableau de variations de f; on y précisera f(0).

c) Tracer la courbe (C).

3°) Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

4°) Justifier que l'équation f(x) = 1 admet exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$). Donner, graphiquement une valeur approchée de α.

EXERCICE III

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC : a = BC, b = CA, c = AB. On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

1°) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC].

a) Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2.

b) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ en fonction de AI^2 et de BC^2

c) En déduire $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Ecrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2.

d) Montrer que :

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

2°) Déterminer l'ensemble (E).

3°) On choisit a = 5, b = 4 et c = 3. Placer les trois points A, B, C et dessiner (E) dans ce cas particulier.

EXERCICE IV

On considère les deux suites de nombres réels, (u_n) et (v_n) définies sur IN* par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + ... + \sin\frac{n}{n^2}$$

et $$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$$

1°) Démontrer que la suite (v) converge vers $\frac{1}{2}$.

2°) a) Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de variable réelle

$$x \longmapsto x - \sin x$$

$$x \longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$x \longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On pourra utiliser les variations de chacune des trois fonctions.

b) Justifier que pour tout $n \geq 1$:

$1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n^4$.

Déduire du a) l'inégalité : $v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel n non nul.

c) Démontrer que la suite u est convergente; quelle est sa limite ?

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°3

Exercice 1 :

1°) Posons P(x) = a x + b.

Alors $P(n+1) = \frac{1}{3}P(n) + n - 1 \iff 3a(n+1) + 3b = an + b + 3n - 3$

$\iff 3an + 3a + 3b = (a+3)n + (b-3)$ pour tout n.

Ce qui donne par identification : $\begin{cases} 3a = a + 3 \\ 3a + 3b = b - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{15}{4} \end{cases}$

2°) $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

$P(n+1) = \frac{1}{3}P(n) + n - 1$

En effectuant la différence membre à membre des deux égalités on obtient :

$u_{n+1} - P(n+1) = \frac{1}{3}u_n - P(n)$ soit : $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

et de premier terme $v_0 = u_0 - P(0) = 1 + \frac{15}{4} = \frac{19}{4}$.

D'où, pour tout n, entier naturel, $v_n = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

De la relation $v_n = u_n - P(n)$ on tire alors l'expression de un : $u_n = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6n-15}{4}$.

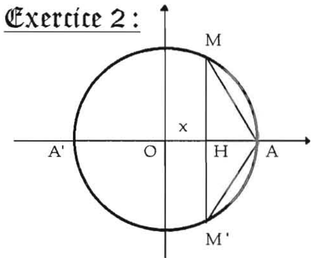
3°) En posant $t_n = v_n$ et $w_n = \frac{6n-15}{4}$ on voit que (u_n) est la somme d'une suite géomètrique (t_n) de raison $\frac{1}{3}$ et premier terme $t_0 = \frac{19}{4}$ et d'une suite arithmétique (w_n) de raison $r = \frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = -\frac{15}{4}$.

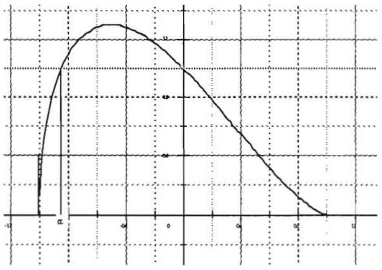
Donc $Tn = t_0 + t_1 + \ldots + t_n = \frac{19}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{57}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

et $Wn = w_0 + w_1 + \ldots + w_n = \frac{(w_0 + w_n)}{2}(n+1) = \frac{-\frac{15}{4}+\frac{6n-15}{4}}{2}(n+1) = \left(\frac{3}{4}n - \frac{15}{4}\right)(n+1)$

Or $U_n = T_n + W_n = \frac{57}{8}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \left(\frac{3}{4}n - \frac{15}{4}\right)(n+1)$

Exercice 2 :





Aire (AMM') $= 2\frac{1}{2}AH \times (2HM) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

2°) $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$. Df = [-1 ; 1]. f est continue sur Df et dérivable sur]-1 ; 1 [.

a) Dérivabilité en -1 : $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1}(1-x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = +\infty$

f non dérivable en -1 mais Cf présente en ce point une tangente verticale.

Dérivabilité en 1 : $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-1} = \lim_{x\to-1} -\sqrt{1-x^2} = 0^-$

f est dérivable en 1 et Cf présente en ce point une tangente horizontale.

b) $f'(x) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x)x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

f'(x) a donc le même signe que $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$

3°) L'aire maximum est obtenue pour $x = -\frac{1}{2}$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
f'(x)		+	0	—	
f(x)	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

donc l'angle orienté $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \frac{2\pi}{3}$ et l'angle inscrit $(\vec{M'A}, \vec{M'M}) = \frac{\pi}{3}$. Le triangle MAM' étant isocèle et possédant un angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, on en déduit qu'il est équilatéral.

4°) La droite d'équation y = 1 coupe la courbe C en deux points, l'un d'abscisse β = 0 et l'autre d'abscisse α < 0. Graphiquement on peut évaluer α à -0,85.

Exercice 3 :

1° $AB^2 + AC^2 = (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (\vec{AI} + \vec{IB})(\vec{AI} + \vec{IC}) = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \iff 3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC}$

$9AG^2 = AB^2 + AC^2 + 2\vec{AB}\times\vec{AC} = AB^2 + AC^2 + 2AI^2 - \frac{BC^2}{2}$

$= AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} - \frac{BC^2}{2} = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$

De même on obtient : $9BG^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ et $9CG^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$

On a donc :

$9(AG^2 + BG^2 + CG^2) = (2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2a^2 + 2c^2 - b^2) + (2b^2 + 2a^2 - c^2)$

$= 3(b^2 + c^2 + a^2)$ Ce qui établit la relation demandée.

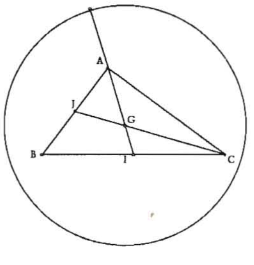
2°) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2 \iff$

$3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = a^2 + b^2 + c^2 \iff$

$3MG^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \iff$

$MG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \iff$

$MG = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = r$.



M décrit donc le cercle de centre G et de rayon r.

3°) Si a = 5, b = 4 et c = 3, alors M décrit le cercle de centre G (point de concours des médianes du triangle ABC) et de rayon $r = \frac{10}{3}$. Dans ce cas-là, le triangle est rectangle en A et la médiane AI = 2,5 donc $GA = \frac{5}{3}$ d'où r = 2 GA.

Exercice 4 :

1°) $v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$

on a donc bien $\lim v_n = \frac{1}{2}$.

2°) a) Posons $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$ et $h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$.

Il faut remarquer tout de suite que g'(x) = f(x) et h'(x) = g(x). L'étude de f nous donnera donc la possibilité d'étudier g puis h.

f'(x) = 1 - cos x. Donc pour tout x, f'(x) ≥ 0 f est donc croissante de 0 à + ∞ sur [0 ; + ∞ [. Donc f(x) est positif sur [0 ; + ∞ [. g est donc croissante sur [0 ; + ∞ [. Son minimum est égal à g(0) = 0. D'où g(x) est toujours positif sur [0 ; + ∞ [., la fonction h est alors toujours croissante de 0 à + ∞ sur [0 ; + ∞ [. Les trois fonctions sont donc positives ou nulles sur [0 ; + ∞ [.

b) Soit $A_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ et $B_n = n^4$.

Soit p(n) la proposition $A_n \le B_n$.

• $A_1 = 1$ et $B_1 = 1$ donc p(1) est vraie.

• Supposons n ≥ 1 tel que p(n) soit vraie donc

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \le n^4$

$\iff 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \le n^4 + (n+1)^3$

$\iff B_n \le n^4 + (n+1)^3$

Or $(n+1)^4 - n^4 - (n+1)^3 = n(n+1)^3 - n^4 = 3n^3 + 3n^2 + n > 0$

donc $B_n \le n^4 + (n+1)^3 \le (n+1)^4$. p(n+1) est donc vérifiée.

• Pour tout n ≥ 1 on a donc $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \le n^4$.

Du signe des fonctions f et h on peut en conclure que pour tout x de [0 ; + ∞ [on a $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ en particulier :

$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3 \le \sin\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$

$\frac{2}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{n^2}\right)^3 \le \sin\frac{2}{n^2} \le \frac{2}{n^2}$

⋮

$\frac{n}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{n}{n^2}\right)^3 \le \sin\frac{n}{n^2} \le \frac{n}{n^2}$

Ce qui donne en sommant membre à membre les n inégalités on obtient :

$v_n - \frac{1}{6n^6}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) \le u_n \le v_n$.

Or $\frac{1}{6n^6}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) \le \frac{n^4}{6n^6} = \frac{1}{6n^2}$

donc $v_n - \frac{1}{6n^2} \le u_n \le v_n$.

On a démontré que $\lim v_n = \frac{1}{2}$. La suite (u_n) est encadré par deux suites qui tendent toutes les deux vers $\frac{1}{2}$, d'après le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim u_n = \frac{1}{2}$.