INTERROGATION N° 11 T.c

EXERCICE I

Soit (E) l'équation différentielle du second ordre

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

1°) a) Quelles sont les solutions de (E) ?

b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$? On dit que (C) et (C') sont tangentes.

2°) Représenter dans un même repère orthonormal les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives.

3°) λ étant un réel strictement positif soit h_λ les fonctions telles que : $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$.

a) Montrer que h_λ est solution de (E).

b) Soit (C_λ) la courbe représentative de h_λ. Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C'), montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.

c) Préciser les positions relatives de (C_λ) et (C').

EXERCICE II

1°) Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x - \frac{x}{e}.$$

a) Calculer $h'(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que : $\forall x \in [1 ; e]$, $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$$

a) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer I_2.

b) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) Démontrer que la suite (I_n) est convergente.

d) En utilisant la question 1° c) démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leq \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n}$$

e) En déduire la limite de la suite (I_n)

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité : 1 cm.

Partie A:

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0.$$

1°) Résoudre cette équation en sachant qu'elle a deux solutions réelles.

2°) On appelle A, B, C, E et G les points d'affixes:

$$3, \; 2 + i\sqrt{3}, \; -1, \; 7 \text{ et } 11 + 4i\sqrt{3}.$$

a) Démontrer que le triangle IAB est équilatéral.

b) Démontrer que les points B, C et G sont alignés.

c) Placer les points A, B, C, E et G.

3°) Calculer l'affixe du point F de l'axe des abscisses tel que le triangle EFG est équilatéral.

Partie B:

On appelle O' le centre de gravité du triangle IAB.

1°) On veut déterminer une homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG.

a) Démontrer que l'image par h de [IA] est [EF].

b) Justifier sue la seule homothétie qui transforme IAB en EFG est telle que : h(I) = E, h(A) = F et h(B) = G.

c) Caractériser h.

2°) Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : $f = h \circ r$.

a) Donner le rapport et l'angle de f.

b) Démontrer que f transforme le triangle IAB en EFG.

3°) Soit g une similitude directe qui transforme IAB en EFG.

a) Démontrer que $h^{-1} \circ g$ est une rotation qui laisse le triangle IAB globalement invariant (c'est-à-dire que le triangle IAB a pour image lui-même).

b) Caractériser les trois rotations qui laissent globalement invariant le triangle IAB.

b) En déduire que les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont h, f et une troisième f' que l'on décomposera à l'aide de h et de r.

c) Donner le rapport et l'angle de f'.

4°) Soit Ω le centre de la similitude f. On appelle K le milieu du segment [IA].

a) Déterminer l'image K' de K par f.

b) Démontrer que Ω, A, G et F sont cocycliques.

c) Démontrer que Ω, F, K et K' sont cocycliques.

d) Construire Ω.

5°) Déterminer l'application complexe associée à f'.

6°) Calculer l'affixe du centre Ω' de f'.

Correction Interrogation n° 11 T.c

EXERCICE I

1°) a) L'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$ est associée à l'équation du second degré $x^2 - 3x + 2 = 0$ qui admet pour racines évidentes 1 et 2.

1/2 Les solutions de (E) sont donc de la forme $y = A e^x + B e^{2x}$. Où A et B sont des réels.

1°) b) Si (C), admet au point d'abscisse $x = 0$ la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$, cela signifie que (C), et (C') ont le point J (0 , 1) en commun et qu'en ce point la tangente doit avoir pour coefficient directeur 3. 1/4

La solution de (E) doit donc vérifier :

$y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$

Soit donc à résoudre le système :

1/4 $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 3 \end{cases}$ c'est à dire $A = -1$ et $B = 2$.

1/4 La solution recherchée est donc $y = -e^x + 2e^{2x}$.

2°) Position relative des deux courbes :

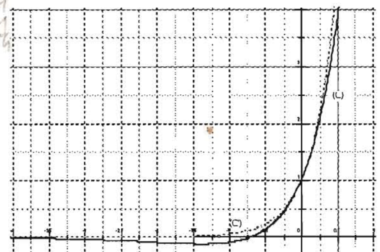
Etudions le signe de la différence

1/4 $\varphi(x) = e^{3x} - 2e^{2x} + e^x = e^x(e^{2x} - 2e^x + 1)$

soit $\varphi(x) = e^x(e^x - 1)^2$ qui est positif ou nul. Donc la courbe (C') est toujours au-dessus de la courbe (C).

C 1/2 + 1/4

C' 1/2 + 1/4



3°) $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$.

1/4 a) h_λ est solution de (E) car h_λ est de la forme $A e^x + B e^{2x}$.

b) Coordonnées du point commun à (C_λ) et (C') vérifient le système :

1/2 $\begin{cases} y = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x} \\ y = e^{3x} \end{cases} \Rightarrow e^{3x} - 2\lambda e^{2x} + \lambda^2 e^x = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 2\lambda e^x + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow (e^x - \lambda)^2 = 0$

soit $x = \ln \lambda$ et $y = \lambda^3$.

1/4 c) La différence $\theta(x) = e^{3x} - 2\lambda e^{2x} + \lambda^2 e^x$ peut s'écrire encore $\theta(x) = e^x(e^x - \lambda)^2$, elle est donc toujours positive et (C') est au dessus de (C_λ).

EXERCICE II

1°) $h(x) = \ln x - \frac{x}{e}$ donc $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e - x}{ex}$.

Le signe de h'(x) dépend uniquement du signe de e - x, on a donc le tableau de variation :

1/2

x	0		e		$+\infty$
h'(x)		+	0	—	
h(x)		↗	0	↘	

1/4 Des varations de h, on en déduit que pour tout x strictement positif, $h(x) \le 0 \Leftrightarrow \ln x \le \frac{x}{e}$. En particulier $\forall x \in [1 ; e]$, $\ln x \le \frac{x}{e}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose :

$I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$

a) $I_2 = \int_1^e x(\ln x)^2 \, dx$.

On pose $u'(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^2$

3/4 alors $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = \frac{2}{x}\ln x$.

$I_2 = [\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x \ln x \, dx$.

On pose alors $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$

alors $u(x) = = \frac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$I_2 = [\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2]_1^e = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x(\ln x)^n dx$

$= \int_1^e x(\ln x)^n(\ln x - 1) \, dx$

1/2 Or sur l'intervalle [1 , e], $\ln x - 1 \le 0$ d'où $x(\ln x)^n(\ln x - 1) \le 0$ ce qui, d'après le théorème de la positivité de l'intégrale permet de conclure que $I_{n+1} - I_n \le 0$ donc, que la suite (I_n) est décroissante.

1/2 c) De plus la fonction $x(\ln x)^n \ge 0$ donc toujours à l'aide du même théorème, on en déduit que (I_n) est minorée par 0.

1/4 En conclusion, la suite (I_n) est minorée et décroissante, elle est donc convergente.

d) On a démontré que

$\forall x \in [1 ; e]$, $0 \le \ln x \le \frac{x}{e}$ donc $(\ln x)^n \le \frac{1}{e^n}x^n$.

D'où $x(\ln x)^n \le \frac{1}{e^n}x^{n+1}$ ce qui nous permet d'obtenir à partir du théorème de comparaison des intégrales

3/4 $I_n \le \int_1^e \frac{1}{e^n}x^{n+1} dx = \frac{1}{e^n}[\frac{1}{n+2}x^{n+2}]_1^e$

$\Leftrightarrow 0 \le I_n \le \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n}$

1/2 e) Or, $\lim \frac{e^2}{n+2} - \frac{1}{(n+2)e^n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim I_n = 0$.

PROBLEME

Partie A:

$z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$.

1°) Si l'équation admet des solutions réelles, cela signifie qu'il existe x réel, tel que

$x^3 - (6 + i\sqrt{3})x^2 + (11 + 4i\sqrt{3})x - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) - i\sqrt{3}(x^2 - 4x + 3) = 0$

1/4 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$

1/4 La deuxième équation admet pour racines 1 et 3 qui vérifient aussi la première équation. Les racines réelles de l'équation complexe sont donc 1 et 3.

2°) Traumé

Points	Affixe
O	0
I	1
A	3
B	$2 + i\sqrt{3}$
C	-1
E	7
G	$11 + 4i\sqrt{3}$

1/2 a) Soit $Z = \frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|Z| = \frac{IB}{IA} = 1$ et $\arg(Z) = (\vec{IA}, \vec{IB}) = \frac{\pi}{3}$ d'où le triangle IAB est équilatéral.

b) Soit $Z' = \frac{z_G - z_C}{z_B - z_C} = 4$ donc 1/2

$\arg(Z') = (\vec{CB}, \vec{CG}) = 0$ [2π], les points C, B et G sont donc alignés et $\vec{CG} = 4\vec{CB}$.

3°) Si F est un point de l'axe des abscisses, soit x son abscisse qui est réelle. Le triangle EFG étant équilatéral, on doit avoir :

soit $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1/2 seule la première équation donne pour x une valeur réelle égale à 15. L'affixe de F est donc 15.

Partie B:

1°) On veut déterminer une homothétie h qui transforme le triangle IAB en EFG.

1/2 a) Si h transforme le triangle IAB en EFG elle transformera le côté [IA] en un côté de EFG qui soit parallèle à (IA) donc l'image de [IA] est [EF].

1/2 b) De même l'image du segment [IB] est le segment [EG]. Le point I étant à l'intersection des segments [IA] et [IB] son image sera à l'intersection de [EF] et [EG] donc I a pour image E. De même on démontre que B a pour image G et A a pour image F.

1/2 c) Si h(B) = G et h(I) = E le centre de l'homothétie est le point de concours des droites (BG) et (IE), c'est-à-dire le point C. De plus,

1/2 d'après la relation $\vec{CG} = 4\vec{CB}$ (démontrée plus haut) on en déduit que h est l'homothétie de centre C et de rapport 4.

2°) Soit r la rotation de centre O' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et f la similitude directe telle que : f = h o r.

1/4 a) f étant la composée d'une homothétie de rapport 4 et d'une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, f est une similitude directe de rapport 4 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1/2 b) Le triangle IAB étant équilatéral, r(I) = A, r(A) = B et r(B) = I d'où f(I) = h[r(I)] = h(A) = F

f(A) = h[r(A)] = h(B) = G et f(B) = h[r(B)] = h(I) = E

f transforme donc le triangle IAB en EFG.

1/4 3°) Si g est une similitude directe qui transforme IAB en EFG on sait que son rapport est égal à 4 car : (un côté de EFG) = 4 x (un côté de IAB).

1/4 a) h^{-1} o g est le produit de deux similitudes de rapports inverses donc c'est une similitude directe de rapport 1 c'est à dire une rotation.

1/4 De plus g(IAB) = EFG et h^{-1}(EFG) = IAB donc h^{-1}og est une rotation qui laisse invariant globalement le triangle IAB.

3/4 b) On a trois possibilités, soit I, A, B dans cet ordre se tranforme en I, A, B (rotation d'angle 0), ou I, A, B se transforme en A, B, I c'est la rotation r et enfin I, A, B se transforme en B, A, I c'est la rotation r^{-1}.

1/2 b) Les similitudes directes qui transforment IAB en EFG sont donc données par :

h o Id = h, h o r = f et h o r^{-1} = f'.

1/4 c) f' étant la composée d'une homothétie de rapport 4 et d'une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, f' est une similitude directe de rapport 4 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

1/2 4°) a) On a f(I) = F et f(A) = G donc, comme f est une similitude, c'est une application affine et conserve les milieux l'image du milieu K de [IA] est donc le point K' milieu de [FG].

b) f(A) = G donc $(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega G}) = \frac{2\pi}{3}$ [2π].

1/2 h(B) = G et h(A) = F donc $\vec{FG} = 4\vec{AB}$ d'où

$(\vec{FA}, \vec{FG}) = (\vec{FA}, \vec{AB}) = \pi + (\vec{AF}, \vec{AB}) = \frac{2\pi}{3}$ [π].

D'où l'égalité $(\vec{FA}, \vec{FG}) = (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega G})$ [π]. Les points Ω, A, F et G sont donc cocycliques.

c) f(K) = K' donc $(\vec{\Omega K}, \vec{\Omega K'}) = \frac{2\pi}{3}$ [2π].

1/2 De plus F, A, K alignés d'une part et F, K' et G alignés d'autre part, alors

$(\vec{FK}, \vec{FK'}) = (\vec{FA}, \vec{FG}) = \frac{2\pi}{3}$ [π].

D'où $(\vec{\Omega K}, \vec{\Omega K'}) = (\vec{FK}, \vec{FK'}) = \frac{2\pi}{3}$ [π]. Les points Ω, F, K et K' sont donc cocycliques.

1/2 d) Le point Ω est donc commun aux cercles circonscrits aux triangle FKK' et AGF. L'un de ces points communs «étant F qui ne peut pas être le centre de f (car f(F) ≠ F) le point Ω est l'autre point commun.

5°) f' = h o r^{-1}.

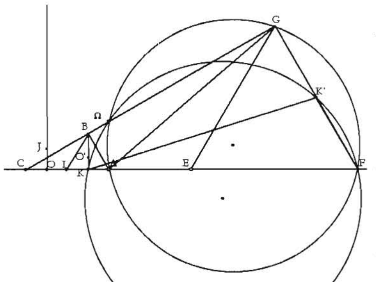
r^{-1} transforme I en B puis h transforme B en G donc f'(I) = G

r^{-1} transforme A en I puis h transforme I en E donc f'(A) = E

f' est une similitude, donc associée à une relation de la forme z' = a z + b.

f'(I) = G $\Leftrightarrow 11 + 4i\sqrt{3} = a + b$

f'(A) = E $\Leftrightarrow 7 = 3a + b$



Des deux équations nous tirons $a = -2 - 2i\sqrt{3}$ et $b = 13 + 6i\sqrt{3}$

1 La relation complexe associée à f' est donc

$z' = (-2 - 2i\sqrt{3})z + 13 + 6i\sqrt{3}$

1/2 6°) Ω' le centre de f' est le point invariant de f' donc son affixe vérifie l'équation

$z = (-2 - 2i\sqrt{3})z + 13 + 6i\sqrt{3}$

$z = \frac{13 + 6i\sqrt{3}}{3 + 2i\sqrt{3}} = \frac{75 - 8i\sqrt{3}}{21}$

1