2003 - 200

TC

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA JEUNESSE, DES SPORTS
CHARGE DE LA CONDITION FEMININE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE D'ETAT DE PORT-GENTIL
B.P. 236 55.21.73

Série : C
Coeff. : 5
Durée : 4 h.

Epreuve de Mathématiques 2

EXERCICE I (4 points)

On considère la suite u définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right] - \ln(n)$$

1°) Démontrer que $u_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n})\right]$

2°) Pour k entier, compris entre 0 et n-1, démontrer que :

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n})$$

3°) En déduire que :

$$u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x\,dx \leq u_n.$$

4°) Déduire de ce qui précède un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE II (5 points)

Soit un losange ABCD de centre O, et tel que OB = 2 OA.

1°) Montrer que le barycentre I des points B, C et D affectés respectivement des coefficients 2, - 1 et 1 est le milieu du segment [AB].

2°) Soit k un nombre réel.

a) Déterminer et représenter l'ensemble E_1 des barycentres G des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients k, 2, k - 1 et 1 - 2k.

b) Préciser la valeur de k pour laquelle G est un point de la droite (AC).

3°) Déterminer et représenter:

a) L'ensemble E_2 des points M du plan tels que :

$$(\vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{MD}).(2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}) = 0$$

b) L'ensemble E_3 des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MC^2 - 2\,MD^2 = -6\,OA^2$$

PROBLEME (11 points)

Partie A.

Soit Φ la fonction numérique définie par :

$\Phi(x) = \dfrac{x}{(\ln x)^2}$ si $x > 0$ et $\Phi(0) = 0$.

1°) Démontrer que Φ est une fonction continue sur son ensemble de définition. 0,5

2°) a) Etudier la dérivabilité de Φ en 0. 0,5

b) Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. 1

3°) a) Etudier le comportement asymptotique de Φ pour les grandes valeurs de x. 0,5

b) Préciser la tangente (T) à la courbe (C), représentative de Φ, au point d'abscisse e. 0,5

c) Tracer (C) et (T) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

4°) Démontrer que l'équation $\Phi(x) = e$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et que l'une de ces solutions est comprise entre e^3 et e^4. 1

Partie B.

Dans cette partie on considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t}$. Le but est de représenter graphiquement cette fonction sans connaître l'expression explicite de f(x).

1°) a) Justifier l'existence de f. 0,25

b) Démontrer que f est croissante sur $]1\,;+\infty[$. 0,5

2°) a) Etablir que pour tout nombre réel t appartenant à $]1\,;+\infty[$ on a : $\ln t < t - 1$. 0,25

b) En déduire une minoration de f(x) lorsque $x > e$. 0,25

Préciser alors la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$. 0,25

c) De façon analogue, calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures. 0,25 + 0,25

3°) a) Soient a et b deux réels tels que : $e \leq a < b$.

Etablir que : $\dfrac{b-a}{\ln b} \leq \int_a^b \dfrac{dt}{\ln t} \leq \dfrac{b-a}{\ln a}$. 0,25

b) Soit x un réel strictement supérieur à e. démontrer que $0 < f(x) < x$

c) Démontrer que : pour tout u tel que $e \leq u < x$ alors : $\dfrac{x-u}{\ln x} \leq f(x) \leq u + \dfrac{x-u}{\ln u}$.

d) Résoudre l'inéquation $\Phi(x) < x$. 0,5

Justifier que l'on peut choisir $u = \Phi(x)$ lorsque $x > e^4$. 0,5

Etablir alors que :

$$\forall x > e^4,\ 1 - \frac{\Phi(x)}{x} \leq \frac{\ln x}{x}.f(x) \leq \frac{1}{\ln x} + [1 - \frac{\Phi(x)}{x}]\frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}.$$

e) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\ln \Phi(x)} = 1$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}.f(x) = 1.$ 0,5 + 0,25

f) Vérifier que l'on a l'égalité :

$$\forall x > e^4,\ f(x) = \frac{x}{\ln x}[1 + \varepsilon(x)] \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

g) En déduire le comportement asymptotique de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$. 0,25

4°) a) On cherche à obtenir une valeur approchée de f(2) :

Soit h la fonction telle que $h(t) = a\,t + b$ et $h(e) = 1$ et $h(2) = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Calculer les réels a et b et donner deux valeurs approchées de ces réels à 10^{-2} près. On utilisera ces valeurs approchées pour la question 4b).

b) On prend alors $f(2) \approx \int_e^2 h(t)\,dt$. Calculer cette valeur.

5°) a) Donner le tableau de variation de f. 0,25

b) Construire la courbe représentative de cette fonction f.

3,5

EXERCICE I

1°) Pour tout k on a $\ln(n+k) = \ln[n(1+\frac{k}{n})] = \ln n + \ln(1+\frac{k}{n})$ d'où $u_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k)\right] - \ln(n) = \frac{1}{n} n \ln n + \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right] - \ln n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right]$

2°) Pour tout entier k compris entre 0 et n-1, sur $[1+\frac{k}{n} ; 1+\frac{k+1}{n}]$, la fonction ln étant croissante on a : $\ln(1+\frac{k}{n}) \le \ln x \, dx \le \ln(1+\frac{k+1}{n})$,

soit en appliquant le théorème de comparaison des intégrales :

$$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(1+\frac{k}{n})\,dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\,dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(1+\frac{k+1}{n})\,dx,$$

ce qui nous donne : $\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\,dx \le \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n})$

3°) La propriété étant vraie pour tout k, en particulier on aura :

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{0}{n}) \le \int_{1}^{1+\frac{1}{n}} \ln x\,dx \le \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$$

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}) \le \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}} \ln x\,dx \le \frac{1}{n}\ln(1+\frac{2}{n})$$

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{n-1}{n}) \le \int_{1+\frac{n-1}{n}}^{2} \ln x\,dx \le \frac{1}{n}\ln(1+\frac{n}{n})$$

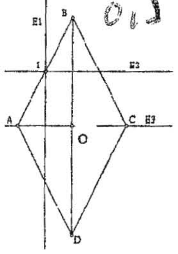
Ce qui nous donne en sommant ces inégalités : $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln x\,dx \le u_n$.

4°) $\int_1^2 \ln x\,dx \le u_n \le \int_1^2 \ln x\,dx + \frac{1}{n}\ln 2$

Or $\frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ d'où, d'après le théorème des gendarmes, u_n tend vers $\int_1^2 \ln x\,dx$. Par une intégration par parties, on obtient $\lim u_n = \int_1^2 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$

5

EXERCICE II



0,5

Si I barycentre de (B, 2), (C, -1) et (D, 1) alors :

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \iff$

$2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \iff$

$2\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ donc I est le milieu du segment [AB].

1

Si G est le barycentre de (A,k), (B,2), (C,k-1) et (D,1-2k) alors:

$k\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + (k-1)\overrightarrow{GC} + (1-2k)\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

égalité qui devient en introduisant I :

1

$2\overrightarrow{GI} + k(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{ID}) = \vec{0} \iff$

$2\overrightarrow{GI} + k(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{IG} = \frac{k}{2}\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{OB}$

Le point G décrit donc la droite passant par I et parallèle à (DB).
Le point de (AC) qui appartient à E1 est donc le milieu de [AO]. Dans ce cas on devra avoir :

$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BO}$ donc $k = -\frac{1}{2}$

0,5

Si M vérifie l'égalité :

$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}).(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$ cela est équivalent à dire (en introduisant A dans le premier facteur et I dans le second) : $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{DB} = 0$ donc le point M décrit la droite passant par I et orthogonale à (DB).

1

Si M vérifie l'égalité :

$MA^2 + MC^2 - 2MD^2 = -6OA^2$

cela est équivalent (en introduisant A dans la relation vectorielle qui en découle) :

$AC^2 - 2AD^2 + 2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}) = -6OA^2$

Or $AC = 2OA$, $AD^2 = OA^2 + OB^2$ et $OB = 2OA$

1

on obtient alors en remplaçant dans la dernière égalité : $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DB} = 0$. Le point M décrit donc la droite passant par A et perpendiculaire à (DB), c'est à dire la droite (AC).

PROBLEME (11 points)

Partie A.

0,25 $D_\phi = [0;1[\cup]1;+\infty[$

$\Phi(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ si $x > 0$ et $\Phi(0) = 0$.

1°) $\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim_{x\to 0} x \frac{1}{(\ln x)^2} = 0 = \Phi(0)$, d'où Φ est continue en 0. Or comme Φ est le quotient de deux fonctions continues (ne s'annulant pas) sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ donc Φ est continue sur $[0; +\infty[\setminus \{1\}$ 0,5

2°) a) $\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$. la fonction Φ est donc dérivable en 0 et son nombre dérivé est 0. 0,25

$D_{\phi'}$ 0,25

b) $\Phi'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x}{(\ln x)^4}$. Le signe de F'(x) dépend donc essentiellement de celui de $(\ln x)^2 - 2\ln x = \ln x(\ln x - 2)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{(\ln x)^2}{x}} = +\infty \text{ car}$$

1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{\substack{X\to+\infty \\ X=\sqrt{x}}} \frac{1}{4}\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2 = 0^+.$$

$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0^+$ donc $\lim_{x\to 1} \frac{x}{(\ln x)^2} = +\infty$. La droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote verticale à (C).

On a donc le tableau de variation :

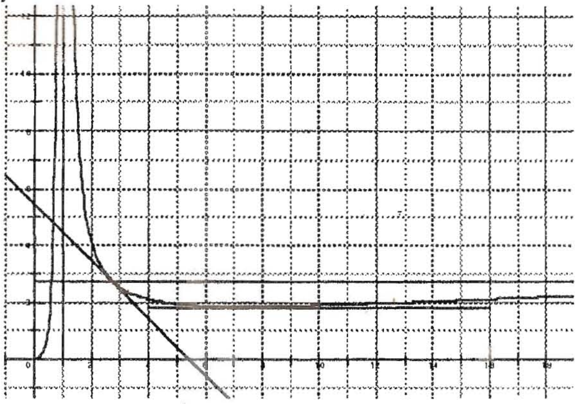
x	0		1		e^2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		+	‖	—	0	+	
$\Phi(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗	$+\infty$

3°) a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$. La

0,25

0,25 courbe (C), admet donc une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction $0x$.

0,25 b) $\Phi'(e) = -1$. La tangente à (C), au point d'abscisse e est donc parallèle à la deuxième bissectrice. elle a pour équation $y = -x + 2e$.

0,75 

4°) Sur l'intervalle $]\,1;\ e^2\,[$, Φ est continue et strictement décroissante, elle définit donc une bijection de l'intervalle $]\,1\,;\,e^2]$ sur $[\,\frac{e^2}{4};+\infty\,[$. Or $e < 4$ donc $\frac{e}{4} < 1$ et $\frac{e^2}{4} < e$ c'est-à-dire que e appartient à l'intervalle $[\,\frac{e^2}{4};\ +\infty\,[$ donc, e admet un unique antécédent dans l'intervalle $]\,1;\ e^2\,[$. On peut remarquer que $\Phi(e) = e$ donc l'antécédent de e est e.

1 Sur l'intervalle $]\,e^2;\ +\infty[$, Φ est continue et strictement croissante, elle définit donc une bijection de l'intervalle $]\,e^2; +\infty\,[$ sur $]\,\frac{e^2}{4};+\infty\,[$. Or $e < 4$ donc $\frac{e}{4} < 1$ et $\frac{e^2}{4} < e$ c'est-à-dire que e appartient à l'intervalle $[\,\frac{e^2}{4};\ +\infty\,[$ donc, e admet un unique antécédent α dans l'intervalle $]\,e^2;\ +\infty\,[$. De plus $\Phi(e^3) = \frac{e^3}{9}$ et $\Phi(e^4) = \frac{e^4}{16}$. On démontre facilement que $\frac{e^3}{9} < e < \frac{e^4}{16}$ donc $\Phi(e^3) < \Phi(\alpha) < \Phi(e^4)$ soit, plus exactement que $e^3 < \alpha < e^4$.

Partie B.

1°) a) Soit x de l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$, sur l'intervalle $[\,e\,;\,x\,]$, la fonction définie par $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ est continue, elle admet donc une primitive. Or, f est la primitive de g qui s'annule en e, donc f est parfaitement définie sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$. 0,25

0,25+0,25 b) Par définition de f, $f'(x) = g(x) = \frac{1}{\ln x}$. Sur $]\,1+\infty\,[$, $\ln x > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur cet intervalle.

2°) a) Soit $\varphi(t) = \ln t - t + 1$. $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - 1$ qui est toujours négatif sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$. Donc φ est décroissante, de plus $\varphi(1) = 0$ Donc pour tout t de $]\,1\,;+\infty\,[$, $\varphi(t) < 0$, soit plus précisément : $0 < \ln t < t - 1$. D'où $\frac{1}{t-1} < \frac{1}{\ln t}$ 0,5

b) Alors, lorsque $x > e$, on peut appliquer le théorème de la positivité de l'intégrale et on obtient

$$f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t} > \int_e^x \frac{dt}{t-1} = \ln(x-1) - \ln(e-1).$$ 0,25

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-1) - \ln(e-1) = +\infty$. D'où d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 0,25

c) Si $1 < x < e$, sur l'intervalle $[\,x\,;\,e\,]$, d'après l'inégalité établie à la B2a) on en déduit que

$$f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t} < \int_e^x \frac{dt}{t-1} = \ln(x-1) - \ln(e-1).$$ 0,25

Or $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x-1) - \ln(e-1) = -\infty$. D'où d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. 0,25

3°) a) $e \le a < t < b \iff 0 < \ln a < \ln t < \ln b$

$\iff 0 < \frac{1}{\ln b} < \frac{1}{\ln t} < \frac{1}{\ln a}$ d'où en appliquant le théorème de comparaison des intégrales (sachant que $a < b$)

$$0 < \int_a^b \frac{1}{\ln b}dt < \int_a^b \frac{dt}{\ln t} < \int_a^b \frac{1}{\ln a}dt$$

soit que : $\frac{b-a}{\ln b} \le \int_a^b \frac{dt}{\ln t} \le \frac{b-a}{\ln a}$ (A) 0,25

b) $e \le t \le x \iff 1 \le \ln t \le \ln x \iff 0 \le \frac{1}{\ln x} \le \frac{1}{\ln t} \le 1$ 0,25

$\iff 0 \le \int_e^x \frac{dt}{\ln t} \le \int_e^x dt = x - e \le x.$ (B) 0,25

c) En appliquant l'inégalité (A) aux réels u et x tels que :

$e \le u < x$ alors : $\frac{x-u}{\ln x} \le \int_u^x \frac{dt}{\ln t} \le \frac{x-u}{\ln u}$

$\iff \frac{x-u}{\ln x} \le \int_u^e \frac{dt}{\ln t} + \int_e^x \frac{dt}{\ln t} \le \frac{x-u}{\ln u}$

$\iff \frac{x-u}{\ln x} \le f(x) - f(u) \le \frac{x-u}{\ln u}$ 0,5

$\iff \frac{x-u}{\ln x} + f(u) \le f(x) \le f(u) + \frac{x-u}{\ln u}$

En appliquant l'inégalité (B) on obtient :

$\frac{x-u}{\ln x} \le f(x) \le u + \frac{x-u}{\ln u}$ (C)

d) $\Phi(x) < x \iff 0 < \frac{x}{(\ln x)^2}\,[\,(\ln x)^2 - 1\,]$

$\iff (\ln x < -1$ ou $\ln x > 1) \iff 0 < x < e^{-1}$ ou $x > e$

Sur l'intervalle $[\,\alpha\,;+\infty\,[$, la fonction Φ est croissante et donc plus particulièrement sur l'intervalle $[\,e^4\,;+\infty\,[$. De plus sur cet intervalle $\Phi(x) > \Phi(\alpha) = e$ et d'après les résultats de l'inéquation précédente, $\Phi(x) < x$. On a donc pour tout $x > e^4$, $e < \Phi(x) < x$. Voilà pourquoi, on peut poser dans l'inégalité (C), $u = \Phi(x)$ lorsque $x > e^4$. Ce qui donne alors : 1,25

$\frac{x - \Phi(x)}{\ln x} \le f(x) \le \Phi(x) + \frac{x - \Phi(x)}{\ln u}$

puis, en multipliant par le nombre positif $\frac{\ln x}{x}$:

$\forall x > e^4,\ 1 - \frac{\Phi(x)}{x} \le \frac{\ln x}{x}.f(x) \le \frac{1}{\ln x} + [\,1 - \frac{\Phi(x)}{x}\,]\frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln x - \ln(\ln x)^2} = \lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ X=\ln x}} \frac{X}{X - 2\ln X} =$ 0,25

$\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{1 - 2\frac{\ln X}{X}} = 1$ Avec le théorème des gendarmes on en déduit

que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}.f(x) = 1.$ 0,25

f) Soit alors $\forall x > e^4$, $\varepsilon(x) = \frac{\ln x}{x}f(x) - 1$ d'après la question précédente on a alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln x}\,[\,1 + \varepsilon(x)\,]$ 0,25

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x}\,[\,1 + \varepsilon(x)\,] = 0$ donc la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction Ox. 0,25

4°) a) $a = \frac{\ln 2 - 1}{(e-2)\ln 2} \approx -0{,}61$ et $b = \frac{e - 2\ln 2}{(e-2)\ln 2} \approx 2{,}67$ 0,5

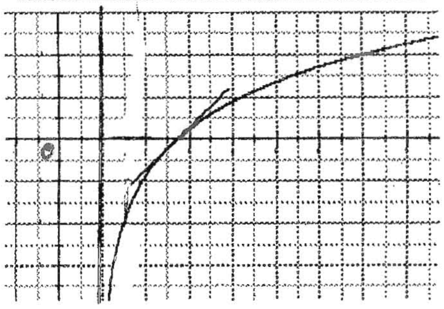
b) $f(2) \approx \int_e^2 h(t)\,dt = [a\frac{t^2}{2} + bt\,]_e^2 = 2(a+b) - e(\frac{ae}{2} + b)$

$= -0{,}88$ 0,25

5°) a)

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	1	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

0,25



0,5