A retourner

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE JOSEPH AMBOUROUE-AVARO
BP: 236 Tél : 55-21-73
PORT-GENTIL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série: C
Durée: 4h
Coeff: 5

5

EXERCICE 1 (4)

Partie A

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct ,A , B , H sont les points d'affixes respectives a , b et $\dfrac{a+b}{2}$ et $a \neq b$.

A chaque point M(z) distinct de A , B , H on associe le point M'(z') tel que

$$\frac{z'-a}{z'-b} = -\frac{z-a}{z-b} . \qquad [\,1\,]$$

1°) Montrez que :
0,5 $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) + \pi$, modulo 2π 0,5

2°) a) Montrez que :

0,75 $$\left(z'-\frac{a+b}{2}\right)\left(z-\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$ 0,75

0,75 **b)** Déduisez-en que la droite (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HM'})$, et que : HM×HM'= HA^2 . 0,5+0,25

0,25 **c)** Montrez que , sans calculs nouveaux ,que si K est le milieu de [MM'] , la droite (MM') est la bissectrice de $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB})$. 0,25

3°) On suppose que a = 2i , b = 4 + 3i , z = 1 + 4i .
0,5 Placez alors le point M'(z') . 0,5

Partie B

Applications aux racines carrées d'un nombre complexe

1°) α est un complexe non nul , z_1 et z_2 sont deux racines carrées de α .Les points M_1 , M_2 , A , B ont pour affixes respectives z_1 , z_2 , α et 1 .
0,5 Montrez que pour $a = \alpha$ et b =1 , z_1 et z_2 vérifient la relation [1] énoncée au début de la partie A 0,5

2°) Déduisez-en que (M_1M_2) est bissectrice de
0,25 $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, où O est l'origine du repère . 0,25

0,5 **3°)** Placez les points M_1 et M_2 lorsque α = -3 + 2i .
0,5

EXERCICE 2

Méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \;.$$ 5

1°) ***Transformation de J .***

Pour tout élément u de $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, on pose

$F(u) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et pour tout élément x de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin \pi.t}{1-t}\,dt$.

a) Prouvez que pour tout élément x de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$: 1

1 $$G(x) = F(\pi) - F(\pi(1-x)) \;.$$

(*On pourra comparer les dérivées des deux membres*) .

b) En déduire que $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi.t}{1-t}\,dt$. 0,25
0,25

2°) ***Approximation de J***

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi.t.dt$

et si $n \geq 1$, $U_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin \pi.t.dt$.

a) Prouvez que , pour tout $n \geq 1$:
$J = U_0 + U_1 + \;...\; + U_{n-1} + r_n$

0,5 où $r_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin \pi.t}{1-t}\,dt$. 0,5

b) Etablissez que , pour tout élément t de $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$:

$$\frac{t^n \sin \pi.t}{1-t} \leq 2t^n \;.$$ 0,5 0,5

Déduisez-en une majoration simple de r_n . 0,25 0,25

c) Montrez que : $J = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_0 + U_1 + \;...\; + U_{n-1})$. 0,25
0,25

3°) ***Calcul des intégrales U_n .***

a) Calculez U_0 et U_1 . 0,25 + 0,5 0,25 +0,5

b) Etablissez que , pour tout entier $n \geq 2$:

$$U_n = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}} - n(n-1)U_{n-2}\right] .$$ 0,75 0,75

4°) ***Conclusion***

A partir des résultats obtenus en **2°)** et **3°)** , indiquez une méthode de calcul d'une valeur approchée de J à la précision 10^{-2} . (On ne demande pas d'effectuer ce calcul) . 0,75 0,75

11

PROBLEME : Ce problème a pour buts d'une part d'étudier la suite $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$ et d'autre de donner une expression de e^a comme limite d'une suite. Pour tout $n > 0$, on note f_n la fonction numérique définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

3 PARTIE A 3

1 1° Donner le tableau de variation de f_n sur $[0\,;+\infty[$ 1

1 2° Pour tout $n \geq 2$, étudier la position relative de (C_n) et de (C_{n-1}) et vérifier que le point $A(n\,;f(n))$ appartient à (C_{n-1}). 0,75+0,25

1 3° Construire sur le même graphique (C_1) et (C_2). 1

4 PARTIE B : *(Le but de cette partie est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout $n > 0$ par $U_n = f(n)$)*

0,5 **1° a)** En utilisant les résultats du A, montrer que la suite (U_n) est décroissante. 0,5

0,25 **b)** La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier. 0,25

On se propose dans les questions suivantes de déterminer la limite de cette suite.

2° a) Soit g la fonction numérique définie sur $[0\,;1]$ par : $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$.

0,75 En utilisant les variations de g, démontrer pour tout t de $[0\,;1]$, on a : $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$.

0,5 **b)** En déduire que pour tout entier $n > 0$, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$. 0,5

3° a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$ 0,5

0,5

0,5 **b)** En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\dots+\frac{1}{2}+1\right)}$ 0

4° a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$ 0,25

0,5

(On pourra utiliser des considérations des aires ou la décroissance de la fonction t à 1/t)

0,5 **b)** En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $U_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$. 0,5

0,25 **c)** Quelle est la limite de la suite (U_n) ? 0,25

4 PARTIE C : Pour tout entier $n > 0$ et pour tout $a \geq 0$, fixé, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt$

0,5 1° Calculer $I_1(a)$. 0,5

0,25 2° Démontrer que pour tout $n > 0$ et tout réel $t \geq 0$, on a $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$ 0,25

0,25 En déduire un encadrement de $I_n(a)$. 0,25

3° a) Démontrer que pour tout $n > 0$, on a : $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$. On pourra utiliser B1 a) pour montrer que $U_n < 1$

0,5 lorsque $n > 0$. 0,5

0,25 **b)** Démontrer que pour tout $n > 0$ on a $0 \leq I_n(a) \leq \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1}$. 0,25

0,25 Justifier que : $\lim_{n\to+\infty}\left[(n+1)\ln\left(\frac{ae}{n+1}\right)\right] = -\infty$. 0,25

0,25 En déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$ 0,25

0,5

4° a) Etablir que pour $n \geq 2$, $I_n(a) = -\frac{a^n}{n!}e^{-a} + I_{n-1}(a)$. *(On pourra utiliser une intégration par parties)*

0,5

0,5 **b)** En déduire que pour $n \geq 2$, $I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$. 0,5

0,25 Cette égalité reste-t-elle valable pour $n = 1$.

5° a) Démontrer que pour tout a de $[0\,;+\infty[$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$

0,25

0,25 **b)** En déduire la limite de la suite (Vn) définie par : $V_n = 1 + \frac{1}{3\times 1!} + \frac{1}{3^2\times 2!} + \dots + \frac{1}{3^n \times n!}$

I 1° $(O, \vec{u}, \vec{v})$ R.O.N.D.

$$\frac{z'-a}{z'-b} = -\frac{z-a}{z-b} \iff \arg\left(\frac{z'-a}{z'-b}\right) = \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) + \pi$$

$$\iff (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{AM'}) \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + \pi \quad [2\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) + \pi \quad [2\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \pi \quad [2\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi \quad [2\pi].$$

2° a- $\dfrac{z'-a}{z'-b} = -\dfrac{z-a}{z-b}$ donne

$(z'-a)(z-b) = -(z-a)(z'-b)$ donc

$(z'-a)(z-b) + (z-a)(z'-b) = 0$ ce qui

donne $zz' - (z+z')\dfrac{a+b}{2} = -ab$

$$\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = zz' - (z+z')\frac{a+b}{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = -ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

d'où $\boxed{\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$

b) $\arg\left[\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right)\right] = \arg\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$

$\Rightarrow \arg\left(z' - \frac{a+b}{2}\right) + \arg\left(z - \frac{a+b}{2}\right) = 2\arg\left(\frac{b-a}{2}\right)$

$\Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{HM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{HM}) = 2(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

$(\vec{u}, \overrightarrow{HM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{HM'})$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HM}) = (\overrightarrow{HM'}, \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$

donc la droite (AB) est la bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$. Par ailleurs

$$\left|\left(z' - \frac{a+b}{2}\right)\left(z - \frac{a+b}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right|$$

donc $\left|z' - \frac{a+b}{2}\right|\left|z - \frac{a+b}{2}\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|^2$ d'où

$HM' \times HM = HA^2$

en conclusion (AB) est bissectrice de $\widehat{MHM'}$ et $HM \times HM' = HA^2$.

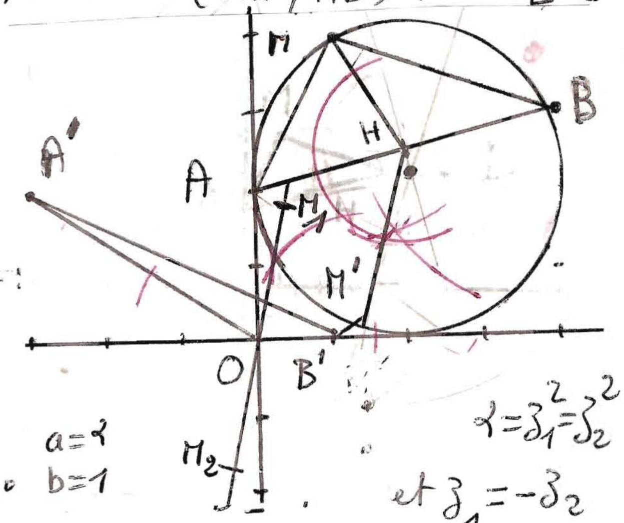
c) si K est le milieu $[MM']$ la relation (1) donne $\dfrac{a-z'}{b-z'} = -\dfrac{a-z}{b-z}$

et $\left(a - \frac{z+z'}{2}\right)\left(b - \frac{z+z'}{2}\right) = \left(\frac{z'-z}{2}\right)^2$

et Alors la droite (MM') est la bissectrice de $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$.

3° $a = 2i \quad b = 4+3i \quad z = 1+4i$

on place M' tq (AB) bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$, H milieu de $[AB]$ et $A\ B\ M\ M'$ cocycliques puisque $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi \quad [2\pi]$.



$a = \alpha$
$b = 1$

$\alpha = z_1^2 = z_2^2$

B° 1° et $z_1 = -z_2$

$$\frac{z_2 - \alpha}{z_2 - 1} = \frac{z_2 - z_2^2}{z_2 - 1} = \frac{-z_2(z_2-1)}{z_2-1} = -z_2 = z_1$$

$$\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - 1} = \frac{z_1 - z_1^2}{z_1 - 1} = \frac{-z_1(z_1-1)}{z_1-1} = -z_1$$

donc $\dfrac{z_2 - \alpha}{z_2 - 1} = -\dfrac{z_1 - \alpha}{z_1 - 1}$ cqfd.

2° $z_1 = -z_2$ et O milieu $[M_1 M_2]$

d'après 2c partie A, la droite (M_1M_2) est bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

3° avec $\alpha = -3+2i$ et $A'(\alpha)$; $B'(1)$ M_1 et M_2 sont sur la bissect. de $(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA'})$ et $OM_1^2 = OM_2^2 = KI = \sqrt{13}$ avec A' et B' rôle de A et B.

II. $J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$; $F(u)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{u}\frac{\sin t}{t}dt$

$G(x)=\int_0^x \frac{\sin \pi t}{1-t}dt$; $u\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ et $x\in[0;\frac12]$.

a) F est la primitive de $t\mapsto \frac{\sin t}{t}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ donc $F'(x)=\frac{\sin x}{x}$ de même G est la primitive de $t\mapsto\frac{\sin\pi t}{1-t}$ qui s'annule en 0 donc $G'(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x}$

Par ailleurs

$[F(\pi)-F(\pi(1-x))]' = \pi F'(\pi(1-x))$

$=\pi\frac{\sin\pi(1-x)}{\pi(1-x)} = \frac{\sin(\pi-\pi x)}{1-x}=\frac{\sin\pi x}{1-x}$

G et $F(\pi)-F(\pi(1-x))$ ont même dérivée

donc $G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))+k$

avec $G(0)=0$ on a $F(\pi)-F(\pi)+k=0$

Ainsi $k=0$ et

$G(x)=F(\pi)-F(\pi(1-x))$ $\forall x\in[0;\frac12]$

b) avec $x=\frac12$ et $F(\frac{\pi}{2})=0$ on a.

$G(\frac12)=F(\pi)-F(\frac{\pi}{2})=F(\pi)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=J$

or $G(\frac12)=\int_0^{\frac12}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=J$

d'où $\boxed{J=\int_0^{\frac12}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt}$

2° a) $\forall t\in[0;\frac12]$ $t\neq1$ et

$1+t+\dots+t^{n-1}=\frac{1-t^n}{1-t}$ donc

$u_0+\dots+u_{n-1}+r_n=\int_0^{\frac12}(1+t+\dots+t^{n-1})\sin\pi t\,dt$

$+\int_0^{\frac12}\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}dt = \int_0^{\frac12}\left(\frac{1-t^n}{1-t}\right)\sin\pi t\,dt +$

$\int_0^{\frac12}\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}dt = \int_0^{\frac12}\left(\frac{1-t^n}{1-t}+\frac{t^n}{1-t}\right)\sin\pi t\,dt$

$=\int_0^{\frac12}\frac{\sin\pi t}{1-t}dt = J$

d'où

$J=u_0+\dots+u_{n-1}+r_n$ avec $r_n=\int_0^{\frac12}\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}dt$.

b) $0\le t\le\frac12 \Rightarrow -\frac12\le -t\le 0\Rightarrow \frac12\le 1-t\le 1$

$\Rightarrow 1\le\frac{1}{1-t}\le 2$ or $0\le t\le\frac12\Rightarrow t\ge0$ et

$0\le\pi t\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow t^n\ge0$ et $0\le\sin\pi t\le1$

$0\le t^n\sin\pi t\le t^n$

avec $\begin{cases}0\le\frac{1}{1-t}\le2\\ 0\le t^n\sin\pi t\le t^n\end{cases}$ on a : $0\le\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}\le 2t^n$

donc $\boxed{\forall t\in[0;\frac12]\quad \frac{t^n\sin\pi t}{1-t}\le 2t^n}$

et $r_n=\int_0^{\frac12}\frac{t^n\sin\pi t}{1-t}\le\int_0^{\frac12}2t^n dt=\frac{1}{(n+1)2^n}$

d'où $\boxed{r_n\le\frac{1}{(n+1)2^n}}$

c) $0\le r_n\le\frac{1}{(n+1)2^n}$ et $\lim\frac{1}{(n+1)2^n}=0$

donc $\lim r_n=0$ par encadrement.

or $J=u_0+u_1+\dots+u_{n-1}+r_n$ et

$\lim u_0+u_1+\dots+u_{n-1}=J$. $+\infty$

3° a) $\boxed{u_0=\frac1\pi ;\quad u_1=\frac{1}{\pi^2}}$

b) $u=t^n$ $\quad u'=nt^{n-1}$

$v'=\sin\pi t$ $\quad v=-\frac1\pi\cos\pi t$

$u_n=\int_0^{\frac12}t^n\sin\pi t\,dt=-\frac1\pi\left[t^n\cos\pi t\right]_0^{\frac12}+\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac12}t^{n-1}\cos\pi t\,dt$

$=\frac{n}{\pi}\left(\frac1\pi\left[t^{n-1}\sin\pi t\right]_0^{\frac12}-\frac{(n-1)}{\pi}\int_0^{\frac12}t^{n-2}\sin\pi t\,dt\right)$

$=\frac n\pi\left(\frac1\pi\left(\frac12\right)^{n-1}-\frac{n-1}{\pi}u_{n-2}\right)$ donc

$\boxed{u_n=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{n}{2^{n-1}}-n(n-1)u_{n-2}\right]}$

4° $J=u_0+\dots+u_{n-1}+r_n$ avec $u_n\ge0$ et $r_n\ge0$

donc $u_0+\dots+u_{n-1}\le J\le u_0+\dots+u_{n-1}+\frac{1}{(n+1)2^n}$

et $|J-(u_0+\dots+u_{n-1})|\le\frac{1}{(n+1)2^n}\le10^{-2}$

on trouve $n=5$ et $u_0+\dots+u_3+u_4$ est 1 val. approchée de J à 10^{-2} près.

PROBLEME

1° $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$

f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \geq 0$

$f_n'(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} e^{-x}(n-x)$; $x \geq 0$;

$\frac{e^{-x}}{n!} > 0$ donc $f_n'(x)$ est de signe de $n-x$.

TV de f_n sur $[0;+\infty[$

x	0		n		$+\infty$
f_n'	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	↗	$\frac{n^n e^{-n}}{n!}$	↘	0

1

2° $n \geq 2$ $f_n(x) - f_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(x-n)$

x	0		n		$+\infty$
Δf	0	$-$	0	$+$	
Posit°		(C_n) au dessous de (C_{n-1})		(C_n) au dessus de (C_{n-1})	

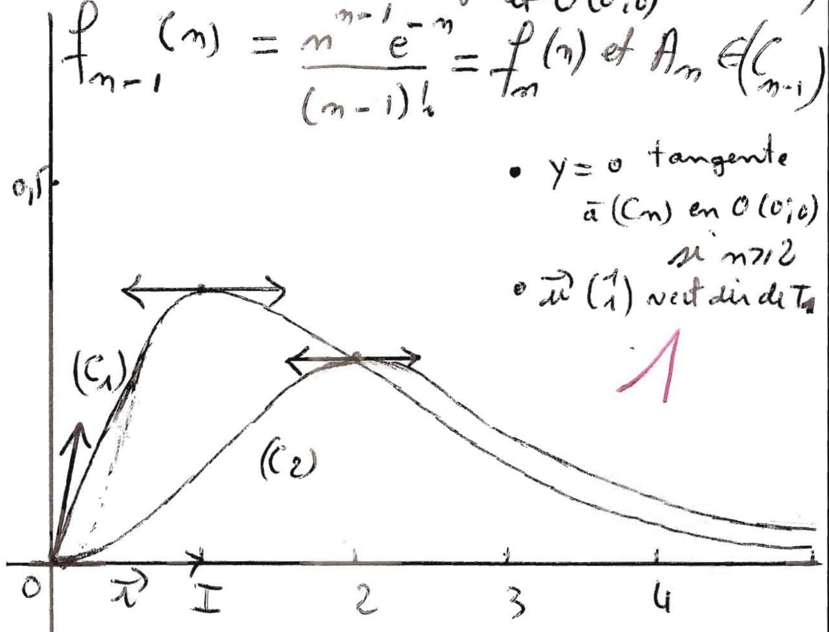
1

(C_n) coupe (C_{n-1}) aux points $A_n\left(n; \frac{n^n e^{-n}}{n!}\right)$ et $O(0;0)$

$f_{n-1}(n) = \frac{n^{n-1}e^{-n}}{(n-1)!} = f_n(n)$ et $A_n \in (C_{n-1})$

• $y=0$ tangente à (C_n) en $O(0;0)$ si $n \geq 2$

• $\vec{u}\binom{1}{1}$ vect dir de T



1

B 1° a) 0,5

$f_{n-1}(n) = f_n(n) \Rightarrow f_n(n+1) = f_{n+1}(n+1)$

$f_n(n)$ est le maximum de f_n sur $[0;+\infty[$

$f_{n+1}(n+1) = f_n(n+1) \leq f_n(n)$

or $f_{n+1}(n+1) = u_{n+1}$ et $f_n(n) = u_n$ donc

$u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est ↘.

b) $u_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!} > 0$ et la suite est décroissante donc elle converge. 0,5

2° a) $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$ avec $t \in [0;1]$.

g est dérivable sur $[0;1]$ et $g'(t) = \frac{t(t-1)}{2(1+t)}$

$t \in [0;1]$ donc $t \geq 0$; $t-1 \leq 0$; $1+t > 0$

et $g'(t) \leq 0$ ainsi g est ↘ sur $[0;1]$.

x	0		1
g'	0	$-$	0
g	0	↘	$\ln 2 - \frac{3}{4}$

0 est le max de g atteint en 0 sur $[0;1]$ donc 1

$g \leq 0$ et $\forall t \in [0;1]$ $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}$

b) $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4} \Rightarrow \frac{\ln(1+t)}{t} \leq 1 - \frac{t}{4}$

$n > 0$ $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1$ en posant $t = \frac{1}{n} \in [0;1]$ on a $n \ln(1+\frac{1}{n}) \leq 1 - \frac{1}{4n}$

ainsi $\ln(1+\frac{1}{n})^n \leq 1 - \frac{1}{4n}$ et alors

$\boxed{(1+\frac{1}{n})^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}} \quad \forall n > 0}$ 0,5

3° a- $\forall n > 0$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^n e^{-n}}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}$ or

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$

d'où $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}}$ $\forall n > 0$ 0,5

b- $u_{n+1} \leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$ $u_n > 0$

$u_2 \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}}$

$u_3 \leq u_2 e^{-\frac{1}{8}}$

$u_n \leq u_{n-1} e^{-\frac{1}{4(n-1)}}$

Par × membre à membre des termes et après simplification on a : $u_n \leq u_1 e^{-\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots}$

avec $u_1 = e^{-1}$ on a : 0,25

$$\boxed{u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)}}$$

4° a) en partageant $[1 ; n]$ en n intervalle de longueur 1 et d'extrémités

$x_0 = 1 ; x_1 = 2 ; \dots x_i = i+1 ; \dots x_n = n$

$x_i \le t \le x_{i+1} \Rightarrow \frac{1}{x_{i+1}} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{x_i}$

$\Rightarrow \frac{1}{i+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{i} \quad \forall i \in \{1 ; \dots n-1\}$

$\Rightarrow \frac{1}{i+1}\int_i^{i+1} dt \le \int_i^{i+1} \frac{1}{t}\,dt \le \frac{1}{i}\int_i^{i+1} dt$

$\Rightarrow \frac{1}{i+1} \le \int_i^{i+1} \frac{1}{t}\,dt \le \frac{1}{i}$ par sommation

et avec la relation de chasles on a

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} \le \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \le \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$$ 0,5

d'où $\boxed{\int_1^n \frac{1}{t}\,dt \le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}}$

b) avec $\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \ln n$ on a

$\ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$ donc

$-\frac{1}{4}\ln n \ge -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)$

$-1-\frac{1}{4}\ln n \ge -1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)$

$e^{-1-\frac{1}{4}\ln n} \ge e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)}$

avec $0 \le u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)}$

on a $\boxed{0 \le u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\ln n} \quad \forall n \ge 2}$ 0,5

c) $\lim_{n\to+\infty} e^{-1-\frac{1}{4}\ln n} = 0$ donc $\lim u_n = 0$ 0,25

$\boxed{C}$ $\forall n \ge 1$ $I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt$

0,5

1° $I_1(a) = \int_0^a t e^{-t} = 1 - (1+a)e^{-a}$

2° $t \ge 0$; $-t \le 0 \Rightarrow e^{-t} \le 1 \Rightarrow t^n e^{-t} \le t^n$

0,25 $0 \le t^n e^{-t} \le t^n$ et $n! > 0 \Rightarrow 0 \le f_n(t) \le \frac{t^n}{n!}$

Ainsi $0 \le \int_0^a f_n(t)\,dt \le \int_0^a \frac{t^n}{n!}\,dt = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$

(4

d'où $\boxed{0 \le I_n(a) \le \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}$ 0,25

3° a) La suite (u_n) ↘ donc

$u_{n+1} \le u_n \le u_{n-1} \le \dots \le u_1 = e^{-1} < 1$

donc $\frac{n^n e^{-n}}{n!} \le e^{-1} < 1$ et $\frac{1}{n!} < \frac{e^n}{n^n}$

d'où $\boxed{\forall n > 0 \quad \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n}$ 0,5

b) $0 \le I_n(a) \le \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < a^{n+1} \times \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}$

donc $0 \le I_n(a) \le \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1}$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty} \frac{ae}{x+1} = 0^+$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\ln\left(\frac{ae}{x+1}\right) = -\infty$ donc 0,25

$\lim_{+\infty} \left[(n+1)\ln\left(\frac{ae}{n+1}\right)\right] = -\infty$

avec $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où $\lim_{+\infty} \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1} = 0$

0,25

Ainsi $\lim_{+\infty} I_n(a) = 0$ par encadrement.

4° a) $I_n(a) = -\frac{1}{n!}\left[t^n e^{-t}\right]_0^a + \frac{n}{n!}\int_0^a t^{n-1} e^{-t}\,dt$

$= -\frac{a^n e^{-a}}{n!} + I_{n-1}(a)$

donc $\boxed{I_n(a) = I_{n-1}(a) - \frac{a^n e^{-a}}{n!}}$

0,5

b° $I_2(a) = -\frac{a^2 e^{-a}}{2!} + I_1(a)$ Par + et après Simplification

$I_3(a) = \frac{-a^3 e^{-a}}{3!} + I_2(a)$

$\vdots$

$I_n(a) = -\frac{a^n e^{-a}}{n!} + I_{n-1}(a)$ on a :

0,5

$I_n(a) = 1 - e^{-a}(a+1) - e^{-a}\left(\frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$

$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$

0,25 $\forall a \ge 0$, $\forall n \ge 2$. pour $n = 1$

$I_1(a) = 1 - e^{-a}(1+a)$ donc l'égalité reste valable.

5° a) $\lim I_n(a) = 0 = \lim\left(1 - e^{-a}\left(1 + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)\right)$

$\lim\left(1 + \frac{a}{1!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right) = e^a$ 0,25

b) $\lim V_n = e^{\frac{1}{3}}$ (c-a-d $a = \frac{1}{3}$) 0,25