REPUBLIQUE GABONAISE 99 – 1 – **MATHEMATIQUES**

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

Série : A1
Durée : 3 heures
Coefficient : 4

Exercice I (5 points)

1.- **a)** Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes le système

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 4 \\ Z_1 Z_2 = 8 \end{cases}$$

On désignera par Z_1 la solution dont la partie imaginaire est négative.

b) Déterminer pour chaque solution le module et un argument.

2.- Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont l'unité graphique est 1 cm.

a) Placer dans le plan (P) les points A, B d'affixes respectives :

$$Z_1 = 2(1-i)\,; \quad Z_2 = 2(1+i)$$

Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier la réponse.

b) Soit R la transformation géométrique du plan (P) qui, au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} Z$$

Préciser la nature de cette transformation.

Exprimer $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sous forme algébrique.

c) Déterminer sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique l'affixe du point A' image de A par la transformation R.

d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice II (5 points)

1.- Une trousse contient 5 bics bleus, 3 bics noirs, 2 bics rouges. On extrait simultanément et au hasard 3 bics de la trousse. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : les 3 bics sont de couleurs différentes ;
B : au moins 2 bics sont noirs ;
C : au plus un bic est rouge.

2.- On extrait maintenant un bic, on note sa couleur et on le remet dans la trousse. On répète l'opération trois fois de suite.
Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de bics noirs obtenus à la fin de l'expérience.

a) Donner les valeurs possibles de X.

b) Quelle est la loi de probabilité de X ?

Problème (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité graphique est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction f, définie sur **R** par $f(x) = ax + b + cxe^{2x}$ où a, b et c sont des nombres réels.

1.- Calculer $f'(x)$.

2.- Sachant que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = 1 - e^2$, déterminer les réels a, b et c.

Partie B

On se donne les fonctions numériques u et f définies sur **R** par

$u(x) = -(2x+1)e^{2x} + 1$

$f(x) = x(1 - e^{2x})$.

1.- Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 1$

(On pourra effectuer le changement de variable $X = 2x$).

2.- Etudier le sens de variation de la fonction u et calculer $u(0)$.
En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

3.- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4.- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. (On pourra utiliser les résultats de la question 2.- en montrant que $f'(x) = u(x)$).

5.- On désigne par (C) la courbe représentative de f.
a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C) lorsque x tend vers $-\infty$.
b) Etudier, suivant les valeurs de x, les positions relatives de (Δ) et de (C).
c) Tracer la courbe (C) et la droite (Δ) pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1.

6.- **a)** Soit α un réel tel que $\alpha < 0$. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (Δ), la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} A(\alpha)$.

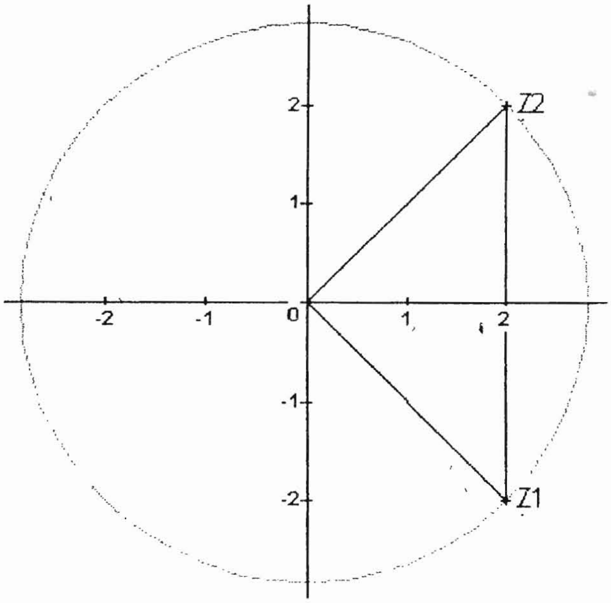
REPUBLIQUE GABONAISE — **99 – 1 – MATHEMATIQUES**

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

Série : A1
Durée : 3 heures
Coefficient : 4

CORRIGE

	Solution	Barème
5 pts	**Exercice I** Equat = 0,5 [illegible] = 0,25 1.-a) $Z_1 = 2 - 2i$ et $Z_2 = 2 + 2i$. 1.-b) $\lvert Z_1 \rvert = 2\sqrt{2}$; si θ_1 est un argument de Z_1, alors $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4}$. $\lvert Z_2 \rvert = 2\sqrt{2}$; si θ_2 est un argument de Z_2, alors $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$. **2.-a)**	1 pt 0,5 pt 0,25 ~~0,5 pt~~



0,50

	Puisque $OA = \lvert Z_1 \rvert = \lvert Z_2 \rvert = OB$, le triangle OAB est isocèle en O. mes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ = mes $(\overrightarrow{OB}, \vec{u})$ + mes $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle OAB est isocèle rectangle en O.	0,5

0,25

	2.-b) La transformation R est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre O. $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.	~~1 pt~~ 0,50
	2.-c) L'affixe $Z_1 = 2(1-i)$ de A admet la forme trigonométrique suivante : $2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $Z_1' = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$. La forme algébrique de Z'_1 est $1+\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$.	1 pt 0,5 0,5
	2.-d) $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\mathrm{Re}\left(Z_1'\right)}{\left\|Z_1'\right\|} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\mathrm{Im}\left(Z_1'\right)}{\left\|Z_1'\right\|} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	~~1~~ pt 0,5
5 pts	**Exercice II** 1.- Les événements élémentaires de l'univers Ω sont les combinaisons de 3 éléments parmi 5+3+2 = 10 . Il y en a $C_{10}^3 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$.	0,5
	A = « les trois bics sont de couleurs différentes » comporte $C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1$ combinaisons puisqu'il s'agit de choisir 1 bic parmi 5 bleus, 1 bic parmi 3 noirs et un bic parmi 2 rouges. $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{5\times 3\times 2}{120} = \frac{1}{4}$.	1 pt
	L'événement B = « au moins 2 bics sont noirs » est la réunion disjointe des événements B_1= « il y a exactement deux bics noirs » et de B_2= « il y a 3 bics noirs ». B_1 contient $C_3^2 \times C_7^1 = 21$ combinaisons (2 choix de bics noirs parmi les 3 bics noirs et un choix de bic parmi les 7 bics rouges ou bleus). B_2 contient $C_3^3 = 1$ combinaison. $P(B) = \frac{21+1}{120} = \frac{22}{120} = \frac{11}{60}$.	1 pt 0,25
	L'événement C= « au plus 1 bic est rouge » est la réunion disjointe de C_1=« aucun bic rouge » et de C_2=« exactement un bic rouge ». C_1 contient les combinaisons choisies parmi les 8 bics bleus ou noirs. Il y en a $C_8^3 = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56$. C_2 est formé des combinaisons à 3 éléments contenant exactement un	1 pt 0,75

	bic rouge et 2 bics choisis parmi les 8 bics bleus ou noirs. Il y en a $C_2^1 \times C_8^2 = 2\times\dfrac{8\times 7}{2\times 1} = 56$. Donc $P(C) = \dfrac{56+56}{120} = \dfrac{14}{15}$. 2.- X est une variable aléatoire de Bernouilli de paramètres $N = 3$ et $p = \dfrac{\text{nombre de bics noirs}}{\text{nombre total de bics}} = \dfrac{3}{10}$. 2.-a) X prend les valeurs 0, 1, 2, 3 . 2.-b) La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $N = 3$ et $p = \frac{3}{10}$. Donc $P(X = k) = C_3^k p^k (1-p)^{3-k}$.	0,5 pt 1,5 pt

k	0	1	2	3	
$P(X=k)$	$\dfrac{343}{1000}$	$\dfrac{441}{1000}$	$\dfrac{189}{1000}$	$\dfrac{27}{1000}$	3 val 1,5

10 pts

Problème

Partie A

1.- $f'(x) = (ax+b)' + (cxe^{2x})' = a + (cx)' \times e^{2x} + cx\times(e^{2x})'$
$= a + c e^{2x} + 2cx e^{2x}$ — ~~1 pt~~ 0,75

2.- Puisque — 1 pt 0,75

$$\begin{cases} f(0) = a\times 0 + b + c\times 0\times e^0 = b \\ f'(0) = a + c\times e^0 + 2c\times 0\times e^0 = a+c \\ f(1) = a+b+ce^2 \end{cases}$$

il s'agit de résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} b = 0 & (1) \\ a+c = 0 & (2) \\ a+b+ce^2 = 1-e^2 & (3) \end{cases}$$

0,25
0,25
0,25

dont l'unique solution est $a = 1\ ,\ b = 0\ ,\ c = -1$

Partie B

1.- Nous nous servirons à plusieurs reprises du résultat (R) suivant : Si $P(x)$ désigne une fonction polynomiale, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)e^x = 0$ — 1 pt

En posant $X = 2x$ nous obtenons ici
$\lim\limits_{x\to-\infty} -(2x+1)e^{2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -(X+1)e^X = 0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -(2x+1)e^{2x} + 1 = 1$.

2.- u est définie, continue, dérivable sur $\mathbf{R}$. **1 pt**

$$\lim_{x\to+\infty} -(2x+1)e^{2x}+1=-\infty \ .$$

$$u'(x)=\left(-(2x+1)\right)'e^{2x}+-(2x+1)\left(e^{2x}\right)'=-4(x+1)e^{2x} \ .$$

0,5

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0		$-$	
$u(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$ 0	$\searrow$	$-\infty$

0,5

Le maximum de u est $u(-1) = 1 + 2\,e^{-2}$.
En 0, u prend la valeur $u(0)=-(2\times 0+1)e^{0}+1=0$.
Le signe de $u(x)$ figure dans la table suivante :

0,25

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	

0,25

3.- En appliquant (R) : **0,5 pt**

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1-e^{2x}\right)=\lim_{x\to-\infty} x-\lim_{x\to-\infty} xe^{2x}=-\infty-0=-\infty \ .$$ 0,25

Par ailleurs :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-2e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\times\lim_{x\to+\infty}\left(1-2e^{x}\right)=+\infty\times(-\infty)=-\infty \ .$$ 0,25

4.- $f'(x)=\left(1-e^{2x}+x\left(-2e^{x}\right)\right)=1-(2x+1)e^{2x}=u(x)$ **1 pt** 0,25 0,25

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$f'(x)=u(x)$		$+$	**0**	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	**0**	$\searrow$	$-\infty$

0,5

5.-a) D'après le théorème (R), $\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=-xe^{2x}=0$ ce qui prouve que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe (C) lorsque x tend vers $-\infty$. **0,5 pt**

b) Les positions relatives de (Δ) et de (C) sont déterminées par le signe de la différence $f(x)$-x. Le tableau ci-dessous regroupe les cas possibles : ~~1 pt~~ 0,5

c) Représentation graphique de la courbe (C) et de la droite (Δ). ~~1 pt~~ 1,5

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$f(x)-x=-xe^{2x}$		$+$	**0**	$-$	
position de (C) par rapport à (Δ)		au-dessus	intersection	au-dessous	

	6.-a) L'aire cherchée, exprimée en unités d'aire, est $\int_{\alpha}^{0}(f(x)-x)\,dx=\int_{\alpha}^{0}\left(-xe^{2x}\right)dx$ 0,5 Une intégration par parties donne 0,25 (posé écriture) $\int_{\alpha}^{0}-xe^{2x}\,dx=\left[-x\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0}-\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=$ 0,25 $0+\frac{1}{2}\alpha\,e^{\alpha}+\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{\alpha}^{0}=\frac{1}{4}(2\alpha-1)e^{2\alpha}+\frac{1}{4}$ unités d'aire. 0,25 0,25 Comme l'unité d'aire est $(2\text{ cm})^2$ soit 4 cm^2 nous obtenons $A(\alpha)=(2\alpha-1)e^{2\alpha}+1\quad\text{cm}^2$ **b)** En appliquant encore une fois le théorème (R) nous obtenons $\lim_{\alpha\to-\infty}A(\alpha)=\lim_{\alpha\to-\infty}(2\alpha-1)\,e^{2\alpha}+1=0+1=1\,\text{cm}^2$	**1 pt** ~~1 pt~~ 0,5