REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2003-1. MATHEMATIQUES

SERIE : A1
DUREE : 3 heures
Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5 points)

1. On considère le polynôme $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des nombres réels.

   a) Calculer la dérivée première et la dérivée seconde notées P' et P'' de la fonction polynôme $P : x \mapsto P(x)$.

   b) Déterminer a, b, c et d sachant que :
   $P(0) = 6$; $P(2) = -4$; $P'(1) = -6$ et $P''(-1) = -10$; en déduire l'écriture du polynôme $P(x)$.

2. Soit le polynôme $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

   a) Calculer $Q(-2)$; en déduire la factorisation de $Q(x)$ sous la forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

   b) Résoudre dans IR l'équation $Q(x) = 0$.

   c) En déduire la résolution dans IR des équations suivantes :

   (i) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 6 = 0.$

   (ii) $5e^x - 6 = e^{3x} - 2e^{2x}.$

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5 ; on suppose que le tirage de chacune des 5 boules est équiprobable.

Une personne tire une boule au hasard, note son numéro et la remet dans l'urne ; puis elle tire une seconde boule et note son numéro.

On appelle X la variable aléatoire définie de la manière suivante :

- si les deux numéros sont identiques, X prend leur valeur commune ;
- si les deux numéros sont différents, X prend la valeur du plus petit des deux numéros.

1. a) Préciser l'univers associé à cette expérience aléatoire.

   b) Quelles sont les différentes valeurs prises par X ?

   c) Définir la loi de probabilité de X. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).

   d) Calculer l'espérance mathématique de X.

   e) Calculer la probabilité de l'événement : « $X \geq 4$ ».

2. On répète 6 fois de suite ce jeu dans les mêmes conditions. (Les résultats seront donnés avec 3 chiffres après la virgule).

   a) Calculer la probabilité pour que l'événement : « $X \geq 4$ » soit réalisé exactement 3 fois.

   b) Calculer la probabilité pour que l'événement: « $X \geq 4$ » soit réalisé au moins une fois.

PROBLEME (10 points)

Partie A : Etude d'une fonction homographique

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$ par $g(x)=\dfrac{3+2x}{3-2x}$.

On désigne par (Γ) sa représentation graphique dans un repère.

1. a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Donner une interprétation graphique des résultats.

2. a) Calculer $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de g.

   b) Etudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g.

   c) Calculer $g(-\frac{3}{2})$ et donner le signe de g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$

Partie B : Etude d'une fonction composée avec ln

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$f(x) = \ln\left(\dfrac{3+2x}{3-2x}\right)$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

unité graphique: *2 cm*. (On rappelle que **f(x) = ln [*g(x)*]**).

1. a) Montrer que f est définie sur $]-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}[$.

   b) Déterminer les limites de f en $-\frac{3}{2}$ et en $\frac{3}{2}$.

   c) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

2. a) Montrer que f est impaire.

   b) Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

3. a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.

   b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation complet.

   c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

4. Construire $\mathscr{C}$, (T) et ses asymptotes dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie C : Calcul d'aire

On considère la partie **(E)** du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ de f, l'axe des abscisses $(O,\vec{i})$, l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$ et la droite (Δ) d'équation $x = 1$.

1. a) Par une intégration par parties, montrer que l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de **(E)** est égale à $\dfrac{5\ln 5-6\ln 3}{2}$.

   b) Donner en cm^2 la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis un arrondi d'ordre *2* de cette valeur.

2. a) Soit l'intégrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. Déduire de la parité de f, la valeur de I.

   b) Quelle est l'aire $\mathscr{A}'$, en unités d'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites (Δ') et (Δ) d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$?

Corrigé –Bac A1- Session 2003- sujet1

Exercice 1 (5 points)

1°) a) $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

$x \in \mathbb{R}$: $P''(x) = 6ax + 2b$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

b) $\begin{cases} P(0) = 6 \\ P(2) = -4 \\ P'(1) = -6 \\ P''(-1) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 6 \\ 8a + 4b + 2c + d = -4 \\ 3a + 2b + c = -6 \\ -6a + 2b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -5 \\ d = 6 \end{cases}$

$\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$ pour le système $\boxed{1 \text{ pt}}$ pour la résolution $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$ pour la conclusion

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$………………………………… $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

2°) a) $Q(-2) = 0$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

donc $Q(x)$ est factorisable par $(x + 2)$: $Q(x) = (x + 2)(x^2 - 4x + 3)$… $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

et $Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

$Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$ ou $x = 3$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

b) (i) $x > 0$; $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5(\ln x) + 6 = 0 \Leftrightarrow Q(\ln x) = 0$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

$\Leftrightarrow x > 0$, $\ln x = -2$ ou $\ln x = 1$ ou $\ln x = 3$

$\Leftrightarrow$ $x = e^{-2}$ ou $x = e$ ou $x = e^3$ $\boxed{0{,}50 \text{ pt}}$

(ii) $5e^x - 6 = e^{3x} - 2e^{2x} \Leftrightarrow Q(e^x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \ln 3$ $\boxed{0{,}75 \text{ pt}}$

Exercice 2 (5 points)

1°) a) L'univers Ω est l'ensemble des couples (x ;y) de $\{1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6\}^2$ $\boxed{0{,}50 \text{ pt}}$

b) Les valeurs de x sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 $\boxed{0{,}50 \text{ pt}}$

c) Loi de X $\boxed{1{,}25 \text{ pt}}$

k	1	2	3	4	5
p(X=k)	$\frac{9}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$

Le candidat doit expliquer comment il trouve la loi sinon $\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$ *de pénalité.*

Vérification : $\sum_{k=1}^{k=5} p(X = k) = 1$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

d) Calcul de l'espérance : $E(X) = 2{,}20$ $\boxed{0{,}25 \text{ pt}}$

e) $p(X \geq k) = p(X = 4) + p(X = 5) = \frac{4}{25}$ $\boxed{0{,}50 \text{ pt}}$

2°) a) Soit p la probabilité cherchée : $p = C_6^3 (\frac{4}{25})^3 (\frac{21}{25})^3 = 0{,}048$….. $\boxed{0{,}75 \text{ pt}}$

b) la probabilité p' cherchée est : $p' = 1 - C_6^0 (\frac{4}{25})^0 (\frac{21}{25})^6 = 0{,}648$ $\boxed{1 \text{ pt}}$

si le candidat utilise une autre méthode, ne pas le pénaliser

Problème (10 points)

Partie A(4 points) Pour tout x $\in$ $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$; $g(x)=\frac{3+2x}{3-2x}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ $\Rightarrow$la droite (Δ) d'équation y = -1 est une asymptote à (Γ) en $-\infty$. $\boxed{2 \times 0{,}25pt}$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} g(x)=+\infty$ $\Rightarrow$la droite (D) d'équation $x = \frac{3}{2}$ est une asymptote à (Γ). $\boxed{2 \times 0{,}25pt}$

b) Pour tout x $\in$ $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$; $g'(x)=\frac{12}{(3-2x)^2}$, $\boxed{0{,}5\ pt}$

donc pour tout x $\in$ $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$, g'(x) > 0 $\boxed{0{,}25\ pt}$

g est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\frac{3}{2}[$ $\boxed{0{,}25\ pt}$

c) Tableau de variation $\boxed{0{,}25\ pt}$

x	$-\infty$ $3/2$
signe de f'	+
f	$-1 \nearrow +\infty$

d) $g(-\frac{3}{2}) = 0$. En plaçant $-\frac{3}{2}$ et son image par dans le T.V. on trouve : $\boxed{0{,}25pt}$ $\boxed{0{,}5\ pt}$

x	$-\infty$	$-3/2$	$+3/2$
$f(x)$	-	0	+

$\boxed{1\ pt}$ pour la représentation complète

détail :

Asympt. $\boxed{2\times0{,}25pt}$

Axes : $\boxed{0{,}25pt}$

Allure : $\boxed{0{,}25pt}$

Partie B (3 points)

$f(x) = \ln(\frac{3+2x}{3-2x})$

a) Pour tout x $\in$ $]-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}[$, $g(x)=\frac{3+2x}{3-2x} > 0$, donc f est définie sur $]-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}[$. $\boxed{0{,}5\ pt}$

b) Pour tout x $\in]-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}[$, on a $-x \in]-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}[$, et f(-x) = - f(x), donc f est impaire $\boxed{0{,}5\ pt}$

Ne pas pénaliser le candidat s'il ne précise pas que le domaine est symétrique par rapport à l'origine, par contre il doit détailler l'égalité f(-x) = - f(x).

F est impaire, alors le point O est un centre de symétrie pour (C). $\boxed{0{,}25\ pt}$

c) Tableau de variation complet de f : ln(g(x)) a même variation que g

x	$-3/2$ $\qquad$ $+3/2$
signe de f'	+
f	$-\infty \nearrow +\infty$

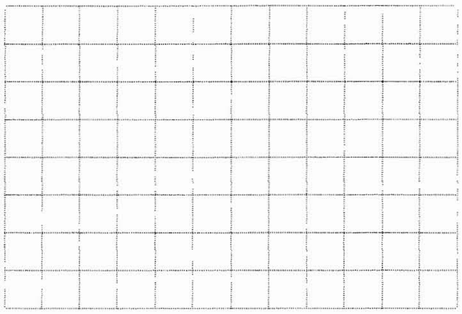
$\boxed{0{,}5\text{ pt}}$ pour le T.V

$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x) = +\infty$ donc les droites (D) et (d') d'équations respectives

x= $\frac{3}{2}$ et x = - $\frac{3}{2}$ sont asymptotes à (C). $\boxed{2\ \text{x}0{,}25\text{ pt}}$

d) Construction de (C) et ses asymptotes dans le repère (O', $\vec{i}$, $\vec{j}$)

$\boxed{1\text{pt}}$ pour
la représentation
complète
<u>*Lesnon respect des unités, du tracé des asymptotes seront sanctionnés.*</u>



Détails :
Pénalités
Asympt.: $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$
Axes : $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$
Allure : $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

Les tangentes remarquables n'ont pas été demandées.

<u>Partie C</u> (3 points)

a) L'aire A exprimée en u. a. est : $A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \ln(\frac{3+2x}{3-2x})dx \quad u.a.$ $\boxed{0{,}50\text{ pt}}$

On pose : $\left| \begin{array}{l} u(x) = \ln(\frac{3+2x}{3-2x}) \quad alors \quad u'(x) = \frac{12}{9-4x^2} \\ v'(x) = 1 \qquad et \qquad v(x) = x \end{array}\right.$

Alors : $A = \left[x\ln(\frac{3+2x}{3-2x})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{12x}{9-4x^2}dx \quad u.a.$ $\boxed{1\text{ pt}}$

$$A = \ln 5 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{-8x}{9-4x^2}dx = \ln 5 + \frac{3}{2}\left[\ln(9-4x^2\right]_0^1 = \ln 5 + \frac{3}{2}\ln 5 - \frac{6}{2}\ln 3 = \frac{5\ln 5 - 6\ln 3}{2} \quad u.a.$$

$\boxed{\text{Pour les détails}}$ $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

b) 1u.a. = 4 cm^2 alors A= (10ln5 – 12ln3) cm^2 = 2,91 cm^2. $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$

c) $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ car f est impaire. $\boxed{0{,}5\text{ pt}}$

d) A' = 2A = (5ln5 –6ln3) u. a. (on accepte la valeur en cm^2) $\boxed{0{,}25\text{ pt}}$