MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
CHARGE DE LA FORMATION CIVIQUE

SECRETARIAT GENERAL

DIRECTION GENERALE DES EXAMENS
ET CONCOURS

DIRECTION DU BACCALAUREAT

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION -TRAVAIL- JUSTICE

BACCALAUREAT SESSION 2022		
EPREUVE DE MATHEMATIQUES		
L'usage de la calculatrice est autorisé		
SERIE : C-SI	*COEFFICIENT : 5*	*DUREE : 4 heures*

Exercice 1 : Questions à choix multiples (5 points)

Pour chacune des questions, **une seule des quatre propositions est exacte.** Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Exemple : Question 1 Réponse A
Une bonne réponse rapporte **1 pt**, une mauvaise fait perdre **0,5 point** et l'absence de réponse ne rapporte et ne fait perdre aucun point. Si le total des points est négatif, la note à cet exercice est ramenée à zéro.

$r^2 + w = 0$

1. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.
Les solutions de cette équation sont de la forme :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(Acos\omega x + Bsin\omega x)e^{2x}$	$(Ax + B)e^{\omega x}$	$Acos\omega x + Bsin\omega x$	$(Ax + B)e^{-\omega x}$

2. Chez l'homme l'angine peut être provoquée soit par une bactérie, soit par un virus. On admet qu'une personne malade ne peut être à la fois porteur du virus et de la bactérie et que l'angine est bactérienne dans 20% des cas. Sur un échantillon de n $(n \geq 2)$ hommes la probabilité d'obtenir au moins une personne atteinte de l'angine dû à une bactérie est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\frac{4}{5}\right)^n$	$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$	$1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n$	Aucune réponse n'est juste

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et Bd'affixes respectives $-1 + 2i$ et i. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|i\bar{z} - 2 + i| = |z - i|$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Un cercle de diamètre [AB]	la médiatrice du segment [AB]	Aucune réponse n'est juste	Une sphère de diamètre [AB]

4. L'intégrale $\int_{e^2}^{e^3} \left(\frac{lnx-1}{xlnx}\right) dx$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D

$1 - ln3 + ln2$	$-1 + ln3 + ln2$	$1 - ln3 - ln2$	$-1 - ln3 + ln2$

5. Soient g et h deux rotations de centres respectifs A et B d'angles respectifs θ et $-\theta$ avec $\theta \neq 0$. C est le point du plan tel que $h^{-1}(A) = C$. La composée $h \circ g$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Une symétrie de centre C	Une translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$	Une translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$	Un anti déplacement

Exercice 2 : Isométries de l'espace (5 points)

Dans l'espace$(\mathcal{E})$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $E(2;1;1), A\left(-\frac{4}{3};\frac{13}{3};-\frac{7}{3}\right)$ et l'application f de l'espace $(\mathcal{E})$ dans $(\mathcal{E})$ d'expression analytique :

$$\begin{cases} 3x' = x + 2y - 2z - 6 \\ 3y' = 2x + y + 2z + 6 \\ 3z' = -2x + 2y + z - 6 \end{cases}$$

1. Déterminer $f(A)$. X

2.Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $M'(x';y';z')$ son image par f.

a) Démontrer que : $\overrightarrow{MM'} = -\frac{2}{3}(x - y + z + 3)\vec{u}$ avec $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

b) Démontrer que l'ensemble (π)des points invariants par $f$est le plan d'équation :

$$x - y + z + 3 = 0.$$

c) Justifier que la droite (MM') est orthogonale à (π) ; X

d) Démontrer que le milieu K du segment [MM'] appartient au plan (π) ;

e) En déduire la nature de f.

3. Soit (D) la droite passant par E et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. X

a) Démontrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$; X

b) Justifier que la droite (D) est orthogonale au plan (π) ; X

c) Déterminer les coordonnées du point K intersection de (D) et (π). X

4. Soit $S_{(D)}$ le démi-tour d'axe (D).

a) Déterminer l'expression analytique de $S_{(D)}$;

b) Déterminer la nature de $s_{(D)} \circ f$, puis montrer que : $s_{(D)} \circ f(A) = E$.

EXERCICE 3 : Arithmétique-Divisibilité par 4 et 17 des termes d'une suite (4 points).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres entiers naturels définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 17 + 3u_n \end{cases}$

1. a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 ;

   b) Que peut-on conjecturer quant à la divisibilité par 4 et 17 des termes de cette suite ?

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n: $u_{n+2} \equiv u_n[4]$;

   b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n: $u_{2n} \equiv 0[4]$;

   c) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_{2n+1} \equiv 1[4]$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + \frac{17}{2}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme ;

   b) En déduire que pour tout entier naturel n : $2u_n = 17\,(3^n - 1)$.

   c) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que pour tout entier naturel n
   $u_n \equiv 0[17]$.

4. Conclure sur la divisibilité par 4 et 17 des termes de la suite (u_n).

Exercice 4 : Etude d'une famille de fonctions – Calcul intégral (6 points)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 1 + xe^{-nx+1}$.

(C_n) est sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition. Si possible, Interpréter graphiquement les résultats.

2. On note f'_n la fonction dérivée de f_n.

a) Montrer que pour tout réel x: $f_n'(x) = (1 - nx)e^{-nx+1}$;

b) Calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, puis dresser le tableau de variation de f_n.

3. a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution φ_n sur $\mathbb{R}$;

b) En déduire le signe de f_n sur $\mathbb{R}$.

4. a) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point commun A dont on précisera les coordonnées ;

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_n) en A.

5. Construire $(C_1), (C_2)$ et (T).

6. On pose pour tout entier naturel non nul n: $W_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n: $1 \leq W_n \leq 1 + \frac{e}{2}$;

b) Démontrer que la suite (W_n) est décroissante ;

c) Déduire alors la convergence de la suite (W_n) ;

d) A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout entier naturel non nul n: $W_n = -\frac{e^{-n+1}}{n^2}(n+1) + \frac{e}{n^2} + 1$;

e) En déduire la limite de la suite (W_n).