REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

Session : Juillet 2020
Séries : A1
Coef.: 4
Durée: 3 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

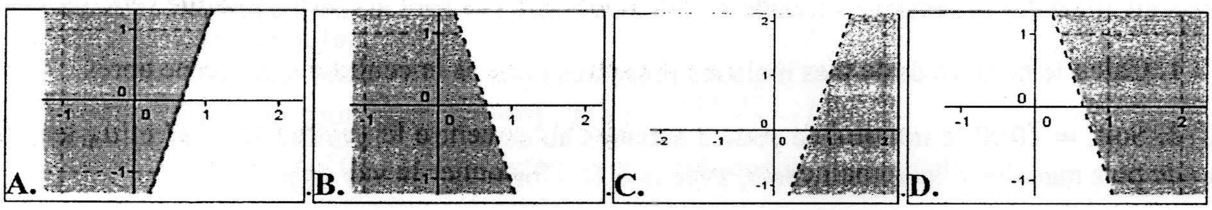
L'usage de la calculatrice est autorisé.
L'épreuve comporte deux exercices et un problème (page 1 à page 3).

Exercice 1 : QCM (6 points)

Pour chaque question, quatre réponses (A, B, C ou D) sont proposées et **une seule réponse est correcte**. Vous indiquerez sur votre copie, dans l'ordre, **le numéro de la question et la réponse correcte.** Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste apporte **1** point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'inéquation linéaire $3x - y - 2 > 0$ a pour solution graphique la partie du plan colorée:



2. On note : $\ln 2 = \alpha$, avec α un réel positif. Alors :

A. $\ln 16 = \alpha + \ln 14$	**B.** $\ln 16 = 4\alpha$	**C.** $\ln 16 = \alpha^4$	**D.** $\ln 16 = 4 \ln \alpha$

3. On donne le tableau statistique à deux variables ci-dessous :

x_i	1	2	3	4
y_i	2	4	a	10

Soit $G(2,5; 6,25)$ le point moyen de cette série statistique. Alors :

A. $a = 5$	**B.** $a = 6$	**C.** $a = 7$	**D.** $a = 9$

4. Le tableau ci-dessous donne la répartition par sexe dans les classes de terminales B et A1 dans un lycée :

	Terminale A1	Terminale B	Total
Filles	30	40	70
Garçons	20	25	45
Total	50	65	115

On interroge au hasard un élève de ce lycée. La probabilité que l'élève interrogé soit un garçon de la terminale B est :

A. $\frac{5}{13}$	**B.** $\frac{5}{9}$	**C.** $\frac{5}{23}$	**D.** $\frac{9}{23}$

5. L'équation $e^{2x^2} = e^2$ a pour ensemble solution dans $\mathbb{R}$:

A. $S = \{-1; 1\}$	**B.** $S = \{1\}$	**C.** $S = \{-1\}$	**D.** $S = \{2\}$

6. u' est la fonction dérivée de la fonction u sur un intervalle I. On sait que u' est strictement positive sur l'un intervalle I. Alors u a les mêmes variations que :

A. e^u	**B.** $-\sqrt{u}$	**C.** $\frac{1}{u}$	**D.** $\ln\left(\frac{1}{u}\right)$

<u>Exercice 2</u> : suites numériques **(6 points)**

Dans une ferme, un éleveur compte 15000 poules au 1er janvier 2017. Une maladie survient dans la ferme et le fermier décide d'ouvrir un centre de soin spécialisé pour éradiquer cette maladie.

A l'ouverture, au 1er janvier 2017 le centre comptait 2000 poules atteintes par la maladie et donc admises à l'isolement. Malgré le traitement, 4% des poules isolées pendant la semaine restent au centre la semaine suivante et 120 nouveaux cas sont accueillis chaque semaine.

1. Calculer le nombre de poules malades présentes dans le centre une semaine après.

2. Soit $u_0 = 2000$ le nombre de poules malades au centre le 1er janvier 2017 et u_n le nombre de poules malades n semaines après, avec $n \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de u_1.

3. On suppose que le nombre de poules malades (n+1) semaines après est donné par la formule :

$$u_{n+1} = 120 + 0{,}04u_n.$$

Calculer u_2

4. On introduit la suite (a_n) définie par : $a_n = u_n - 125$ pour tout entier naturel n.

a) Calculer a_0.

b) Démontrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{25}$.

c) En déduire que (a_n) est une suite géometrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5. a) Exprimer a_n en fonction de n.

b) En déduire que $u_n = 125 + 1875 \times \left(\frac{1}{25}\right)^n$.

6. a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

b) Cette maladie sera-t-elle éradiquée ? Justifier votre réponse.

Problème : Etude d'une fonction logarithme **(8 points)**

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{4-x^2}{2x} - \frac{\ln x}{x}$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J) d'unité graphique 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 6 - 2\ln x$.

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$.
   a) Calculer $g'(x)$.
   b) Justifier que pour tout $x \in\ ]0;\ +\infty[$ on a : $g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variation sur $]0;\ +\infty[$.
3. a) Calculer g(1).
   b) Justifier que pour tout $x \in\ ]0;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B : Etude de la fonction *f*.

1. Justifier que pour tout $x \in\ ]0;\ +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{4-x^2}{2} - \ln x\right]$.
2. En déduire que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $]0;\ +\infty[$.
   a) Calculer $f'(x)$ puis, démontrer que pour tout $x \in\ ]0;\ +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de f.
5. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.
6. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;\ +\infty[$.

   b) Justifier que $1,7 < \alpha < 1,8$.

6. a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe (C).

   b) Résoudre dans $]0;\ +\infty[$ l'inéquation $2 - \ln x > 0$.

   c) En déduire la position relative de (D) et (C).

7. Tracer (D) et (C) dans le repère (O, I, J).