BACCALAUREAT BLANC
Session de Février 2023

Epreuve de Mathématiques

Série : C **Durée : 4h** **Coefficient 5**

(L'utilisation de la calculatrice est autorisée)

<u>Exercice 1</u> : Questions à choix multiples…………………………………………………..... (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions de réponse est correcte. Chaque réponse correcte rapporte **1 point**. Une réponse erronée enlève **0,25 point**. Une absence de réponse n'enlève pas de point. Si le total des points est négatif, la note à cet exercice est ramenée à zéro. On notera sur la copie le numéro de la question et la proposition de réponse choisie; exemple : **1. A.**

1. On considère les nombres $a = 2n^2 + 4n + 16$ et $b = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.Dans la division de a par b.

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\forall n,$ le reste est $n+15$	$\forall n > 13,$ le quotient est $n+1$	$\forall n \leq 14,$ le reste est $14-n$	Aucune proposition correcte

2. On donne $a \equiv 30757[10]$; $b \equiv 15163[10]$; $c \equiv 12924[10]$. Après avoir simplifié la congruence, on trouve :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$a+b+c \equiv 4[10]$	$a-b+c \equiv 5[10]$	$a+b-c \equiv 6[10]$	Aucune proposition correcte

3. Soit le point $\mathrm{A}(1;-2;0)$, le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x+y-3z+4=0$ et $(\mathcal{D})$ la droite passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t, t \in \mathbb{R} \\ z = -3-3t \end{cases}$

Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $(\mathcal{D})$ avec le plan $\mathcal{P}$ sont :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(-4;0;0)$	$\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$	$\left(\frac{7}{9};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$	Aucune proposition correcte

4. f est la fonction définie $\forall x \neq 1$, par: $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

La primitive de f sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 2 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$x+2\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}-1$	$x+2\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+2$	$x+2\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+1$	Aucune proposition correcte

5. f_n est la fonction définie $\forall x \in]0\,;+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par : $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n - 1}$ Alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\lim\limits_{x\to1} f_n(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to1} f_n(x) = n$	$\lim\limits_{x\to1} f_n(x) = \frac{1}{n}$	Aucune proposition correcte

<u>Exercice 2</u> : Nombres complexes……………………………………………………………(5points)

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u},\ \vec{v})$.

On note A le point d'affixe 4, puis B et C les points d'affixes respectives : $\boldsymbol{\alpha = 3 + i\sqrt{3}}$ **et** $\boldsymbol{\bar{\alpha} = 3 - i\sqrt{3}}$.

1. Calculer le module et un argument de $\boldsymbol{\alpha}$. En déduire le module et un argument de $\boldsymbol{\bar{\alpha}}$.
2. On considère le nombre complexe $\boldsymbol{\alpha - 4}$.
   Écrire ce nombre sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
3. Calculer le module et un argument du nombre $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha - 4}}$. En déduire le module et un argument de $\dfrac{\boldsymbol{\bar{\alpha}}}{\boldsymbol{\bar{\alpha} - 4}}$.
4. En interprétant géométriquement les résultats de la question précédente, démontrer que les points O, A, B et C sont sur un même cercle (C) dont on précisera les caractéristiques.
5. Dans le repère précédent, placer rigoureusement les points A, B, C, et construire le cercle (C).
   On prendra $1\ cm$ pour unité graphique.

<u>Exercice 3</u> : Isométries………………………………………………………………..………(5 points)

A, B, C, D sont des points distincts tels que : $AB = CD$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Placer les points A, B, C et D sur une figure.

1. a) Soit *f* l'isométrie qui transforme A en C et B en D. Démontrer que *f* est un déplacement.

   b) Justifier que *f* est une rotation dont on précisera l'angle.

   c) Expliquer la construction du centre E de cette rotation. Placer le point E sur la figure précédente.

   d) On appelle *g* le déplacement transformant A en D et B en C.

   Démontrer que *g* est une rotation dont on précisera l'angle et le centre F.

   Placer le point F sur la figure précédente.

2. a) Montrer que le quadrilatère EIFJ est un carré.

   b) Identifier chacune des transformations suivantes : $g \circ f^{-1}, g \circ f^{-1} \circ g$.

<u>Exercice 4</u> : Étude d'une famille de fonctions……………………………………………(5 points)

Dans tout l'exercice, *n* désigne un entier naturel non nul.

<u>Partie A :</u> Étude d'une fonction auxiliaire g_n

Soit g_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g_n(x) = n + \frac{n}{x^2} - 2\ln x$.

1. Étudier les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.
2. Justifier que g_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, étudier le sens de variation de g_n et dresser son tableau de variations.
3. a) Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $]0;+\infty[$.

   b) Montrer que $\alpha_n \in \left[e^{\frac{n}{2}}; e^n\right]$.

   c) Étudier le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de *x*.

<u>Partie B :</u> Étude de la fonction f_n

f_n est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{1+x^2}$.

(C_n) est la représentation graphique de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

   Étudier suivant la parité de *n* (pour *n* pair et pour *n* impair) la limite de f_n en 0.
2. Justifier que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, calculer $f_n'(x)$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n,

   et vérifier que $f_n'(x) = \frac{x(\ln x)^{n-1} g_n(x)}{(1+x^2)^2}$.
3. Étudier le signe de $f_n'(x)$ suivant la parité de *n* et en déduire le sens de variation de f_n.

   On étudiera aussi le cas où $n = 1$.
4. Dresser le tableau de variation de f_n dans les différents cas.
5. a) Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $f_{n+1}(x) = f_n(x)$.

   b) En déduire la position relative des courbes (C_{n+1}) et (C_n) pour tout réel $x \geq 1$.