30 30

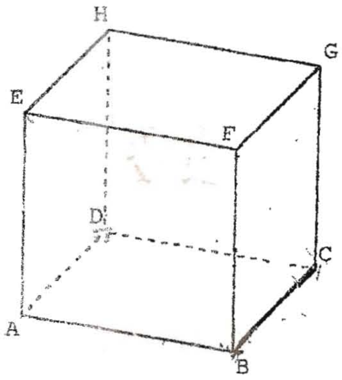
REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2003- 1 MATHEMATIQUES
SERIE : C-E
Durée [redacted]
Coef : 5

Exercice1 (5 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on considère le cube de sommets A, B, C, D, E, F, G , H. dont une représentation est jointe .

On considère I le milieu de l'arête [BF] et J le point défini par : $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.



1°) a) Préciser les coordonnées des points I et J.

b) Démontrer que les points A, I, J définissent un plan (P) dont on déterminera une équation cartésienne.

2) a) Calculer le volume du tétraèdre AIJE.

b) Calculer l'aire du triangle AIJ et en déduire la distance du point E au plan (P).

3°) Soit (Q) le plan d'équation : $3x - 3y + 6z - 8 = 0$.

a) Démontrer que (P) et (Q) sont sécants.

b) Déterminer une représentation paramétrique de (Δ) intersection de (P) et (Q) et vérifier que (Δ) passe par le point de coordonnées $(1, \frac{1}{3}, 1)$.

4°). Soit O le centre de la face CGFB.

Déterminer géométriquement l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB}$. (on pourra utiliser le point O).

Exercice2 (4points)

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard une boule de l'urne, on lit le numéro noté a, puis on remet la boule tirée dans l'urne. On tire ensuite une deuxième boule de l'urne et on note b le numéro de la boule tirée .

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On considere les vecteurs $\vec{u}$, et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (a ; 1) et (ab – b + 6 ; b+1).(a et b sont les réels définis ci-dessus).

1°) Démontrer que la probabilité que ces vecteurs soient colinéaires est égale à $\frac{1}{5}$.

2°) Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie chaque joueur effectue le tirage de deux boules tel que décrit dans la 1 ère question.

Si A obtient des vecteurs colinéaires et B des vecteurs non colinéaires, A est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non colinéaires et B des vecteurs colinéaires, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas les joueurs entreprennent une nouvelle partie et le jeu continue.

Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par :

A_n : « A gagne la $n^{ième}$ partie ».

B_n : « B gagne la $n^{ième}$ partie » .

C_n : « le jeu continue après la $n^{ième}$ partie ».

a) Calculer les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$ des évènements A_1, B_1 et C_1.

b) Etant donné que : $C_{n+1} \subset C_n$, $A_{n+1} \subset C_n$ et $B_{n+1} \subset C_n$,

déterminer alors $C_{n+1} \cap C_n$, $A_{n+1} \cap C_n$ et $B_{n+1} \cap C_n$.

c) Donner $P(C_{n+1} / C_n)$, $P(A_{n+1}/ C_n)$ et $P(B_{n+1} /C_n)$. Exprimer $P(C_{n+1})$, $P(B_{n+1})$, $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$. En déduire que $P(C_n) = (\frac{17}{25})^n$.

d) En déduire que $P(C_n) = (\frac{17}{25})^n$, $P(B_n) = P(A_n) = \frac{4}{25}(\frac{17}{25})^{n-1}$.

e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(A_n) \leq 0.01$

Problème (11 points)

Dans ce problème n est un entier naturel différent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} & pour\ x \neq -1 \\ f_n(-1) = 0 \end{cases}$.

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm, et on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Pour tout entier naturel n différent de zéro ,on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g_n(x) = (-2n+x+1)e^{x+1} + 2n$.

1°) a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g_n(x)$.

b) Donner le sens de variation de g_n puis dresser son tableau de variation.

2°) a) Calculer $g_n(-1)$ et en déduire que : $2n - e^{2n-1} < 0$ pour tout n différent de zéro.

b) Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle $]2n - 2; +\infty[$.

c) Démonter que α_n appartient à l'intervalle $]2n - 2; 2n - 1[$ puis en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$ est croissante.

3°) a)Déterminer le signe de g_n suivant les valeurs de x.

b) Déterminer les coordonnées du point M_n où la courbe représentative de la fonction g_n admet un extremum et en déduire que le point M_n appartient à une courbe dont on donnera une équation.

Partie B : Etude des fonctions f_n pour n différent de zéro et représentation de (C_1) .et de (C_2)

1°) a) Etudier la continuité de f_n en -1.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en -1 (on distinguera deux cas $n = 1$ et $n > 1$).

2°) a) Calculer les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que pour tout réel x différent de -1.

$$f'_n(x) = \frac{(x+1)^{2n-1}}{(1-e^{x+1})^2} \times g_n(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1-e^{x+1}}\right]^2 \times (x+1)g_n(x)$$

c) Donner le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation pour $n > 1$.

3°) a) Démontrer que les courbes (C_2) et (C_3) ont trois points communs A, B et C que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives des courbes (C_2) et (C_3), puis les construire sur un même graphique.

Partie C : Etude d'une suite.

p est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

Soit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p - 2; 2p - 1]$; par :

$$h_p(x) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2p - 2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier n.}$$

1°) Démonter que pour tout x de I_p les équations $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.

2°) a) En utilisant la partie A, 2°) a) montrer que pour tout $x \in I_p$, on a :

$h_p(x) \in I_p$ et $\left|h'_p(x)\right| \leq \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1$

3°) On pose : $k_p = \frac{2p}{e^{2p-1}}$

a) Démontrer que pour tout n, $u_n \in I_p$.

b) Démontrer que pour tout n, $\left|u_{n+1} - \alpha_p\right| \leq k_p\left|u_n - \alpha_p\right|$, puis en déduire $\left|u_n - \alpha_p\right| \leq k_p^{\,n}$ et que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Partie D Convergence d'une suite.

On pose : $v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx$ pour n entier naturel non nul.

1°) a) Justifier l'existence de (v_n).

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq 0$.

c) Montrer que (v_n). est croissante, que peut-on en déduire ?

2°) a) En utilisant les variations de f_n sur l'intervalle [-1 ; 0], montrer que $\frac{1}{1-e} \leq f_n(x) \leq 0$.

b) En déduire que $\frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$, calculer la limite de (v_n).

N.B. La partie D est indépendante de la partie C.

Corrigé du bac Séries C-E- session 2003- sujet 1

Exercice 1 (5points)

1°) a) **Les coordonnées de I et J**

dans la base (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$) on a :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ alors I $(1 ; 0 ; \frac{1}{2})$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ or $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc J $(0 ; \frac{2}{3} ; 1)$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

b) **A, I, J définissent un plan (P) et une équation cartésienne de (P).**

Il est évident que $\overrightarrow{AI} \neq \lambda\overrightarrow{AJ}$ alors les 3 points A, I et J ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan de l'espace (P). $\boxed{\text{0, 25 point}}$

Un vecteur normal à ce plan (P) est $\vec{n} = \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ} = (-\frac{1}{3} ; -1 ; \frac{2}{3})$

M(x ;y ;z) ∈ (P) ⇔ $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ on trouve : (P) : x + 3y – 2z =0 $\boxed{\text{0,75point}}$

2°) a) **Volume du tétraèdre AIJE**

Ce solide est une pyramide à base triangulaire AIE et dont la hauteur est [EJ]

Le triangle AIE est isocèle en I, l'aire de ce triangle est $\mathscr{B} = \frac{1}{2}$ et h = EJ $\frac{2}{3}$

Le volume $\mathscr{V} = \frac{1}{3}\mathscr{V} \times h = \frac{1}{9}$ exprimé en unité de volume. $\boxed{\text{0,5 point}}$

b) **Aire de AIJ et la distance du point E au plan (P)**

en utilisant les propriétés du produit vectoriel on a :

$||\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}|| \times \frac{1}{2}$ est l'aire du triangle AIJ, on trouve : $||\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}|| \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{14}}{6}$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

soit d la distance du point E au plan (P), considérant le tétraèdre AIJE, si AIJ est la base alors d serait la hauteur. En égalant les deux manières de calculer ce volume on trouve d

$\mathscr{V} = \frac{d}{3} \times \frac{\sqrt{14}}{6}$ alors $d = \mathscr{V} \times \frac{18}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$ $\boxed{\text{0,5 point}}$ $d = \frac{1}{9} \times \frac{18}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14}$

3°) a) **(P) et (Q) sécants**

(P) : x + 3y –2z = 0 et (Q) : 3x – 3y +6z – 8= 0

$\vec{n}_1$ (1 ; 3 ; -2) vecteur normal à (P)

$\vec{n}_2$ (3 ; -3 ; 6) vecteur normal à(Q), il est évident que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont parallèles ils sont sécants et un vecteur directeur de la droite d'intersection est $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (-12 ; 12 ; 12)$ colinéaire à (-1 ; 1 ; 1) $\boxed{\text{0,5 point}}$

b) **Une représentation paramétrique de la droite d'intersection de (P) et (Q)**

exprimons x et y en fonction de z, puis on pose z = t, on trouve

$$\Delta : \begin{cases} 3x - 3y + 6z - 8 = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -\frac{2}{3} + t, \\ z = t \end{cases}$$ $\boxed{\text{0,5 point}}$

pour t = 1 on obtient le point de coordonnées $(1 ; \frac{1}{3} ; 1)$ qui passe donc par Δ.

$\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BC}$

4°) **L'ensemble de points M tels que $\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB}$**

$\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

décomposons à l'aide du point O et utilisons les propriétés du produit vectoriel

$\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MF} \wedge (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{FG} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF}) \wedge \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) \wedge (-\overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = (2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OC}) \wedge \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{O}$

Cet ensemble est donc la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ $\boxed{\text{1 point}}$

Exercice 2 (4 points)

L' univers de cette épreuve $\Omega = \{(a\,;b)$ avec $1 \le a \le 5$ et $1 \le b \le 5\}$

$\vec{u}\,(a\,;1)$ et $\vec{v}\,(ab-b+6\,;b+1)$

1°) **Probabilité pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si a+b = 6

Soit p la probabilité pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

p est la probabilité de l'événement A={(1 ;5), (2 ;4), (3 ;3), (4 ;2), (5 ;1)}

$p = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ et $\overline{p} = 1 - p = \frac{4}{5}$ $\boxed{0{,}5 \text{ point}}$

2°) a) **Les probabilités des événements A_1, B_1 et C_1**

Il y a indépendance entre les résultats des joueurs A et B, donc la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités.

A_1, B_1 et C_1 sont des intersections d'événements indépendants, d'après 1°) , on a :

$p(A_1) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$ $p(B_1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$ $p(C_1) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{17}{25}$ $\boxed{0{,}75 \text{ point}}$

A_1, B_1 et C_1 sont les trois issues exclusives de la première partie et on a bien que la somme de leurs probabilités est égale à 1.

b) **Les intersections ensemblistes**

puisque $C_{n+1} \subset C_n$ alors $C_{n+1} \cap C_n = C_{n+1}$.

de la même façon $A_{n+1} \subset C_n$ alors $A_{n+1} \cap C_n = A_{n+1}$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

$B_{n+1} \subset C_n$ alors $B_{n+1} \cap C_n = B_{n+1}$

c) **Les probabilités des issues de la n+1 ième partie.**

Comme toutes les parties la n+1ième partie a 3 éventualités exclusives. Toutes les parties se déroulent dans les mêmes conditions.

Le calcul direct des probabilités conditionnelles donne :

$P(C_{n+1} / C_n) = P(C_1) = \frac{17}{25}$ $P(A_{n+1} / C_n) = P(A_1) = \frac{4}{25}$ $P(B_{n+1} / C_n) = P(B_1) = \frac{4}{25}$ $\boxed{0{,}5 \text{ point}}$

Les expressions à l'aide $P(C_n)$.

d'après 2°)b) et les propriétés des probabilités conditionnelles :

$P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} \cap C_n) = P(C_{n+1}/ C_n) \times P(C_n) = \frac{17}{25} \times P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap C_n) = P(B_{n+1}/ C_n) \times P(C_n) = \frac{4}{25} \times P(C_n)$ $\boxed{0{,}75 \text{ point}}$

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap C_n) = P(A_{n+1}/ C_n) \times P(C_n) = \frac{4}{25} \times P(C_n)$

d) **Calcul des probabilités $P(C_n)$, $P(A_n)$ $P(B_n)$**

Les égalités précédentes sont des relations de récurrence.

La première relation définit les probabilités $P(C_n)$ comme une suite géométrique de raison $\frac{17}{25}$ et de premier terme $P(C_1) = \frac{17}{25}$ d'où : $P(C_n) = (\frac{17}{25})^n$ cqfd.

$P(B_n) = \frac{4}{25} \times P(C_{n-1}) = \frac{4}{25} \times (\frac{17}{25})^{n-1}$ $P(A_n) = \frac{4}{25} \times P(C_{n-1}) = \frac{4}{25} \times (\frac{17}{25})^{n-1}$ $\boxed{0{,}75 \text{ point}}$

e) **Le plus petit entier tel que $P(A_n) \le 0{,}01$**

$\frac{4}{25} \times (\frac{17}{25})^{n-1} \le 0{,}01 \quad \Leftrightarrow (\frac{17}{25})^{n-1} \le \frac{1}{16}$

par passage au logarithme

$\boxed{0{,}5 \text{ point}}$

$(n-1)\ln(\frac{17}{25}) \le -\ln 16 \quad \Leftrightarrow n \ge 1 - \frac{\ln 16}{\ln(\frac{17}{25})}$

on obtient : $n = 9$

Problème(11 points)

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} & pour\ x \neq -1 \\ f_n(-1) = 0 \end{cases}$$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire $\boxed{\text{(3,25 points)}}$

N $\in \mathbb{N}^*$, pour tout x $\in \mathbb{R}$: $g_n(x) = (-2n + x + 1)\, e^{x+1} + 2n$

1°) a) **Les limites de g_n en $-\infty$ et en $+\infty$**

limite en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+1} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^{x+1})$ par somme on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x) = 2n$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

limite en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} (2n + x + 1)$ par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

b) **Sens et tableau de variation de g_n**

Sur $\mathbb{R}$ les fonctions : $x \to (-2n + x + 1)$ et $x \to e^{x+1}$ sont dérivables, par produit g_n est dérivable et

$g_n'(x) = (x - 2n + 2)e^{x+1}$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

pour tout x $\in \mathbb{R}$, $e^{x+1} > 0$, g_n' a le même signe que $(x - 2n + 2)$

pour $x > 2n - 2$ $g_n'(x) > 0$ alors g_n est croissante

pour $x < 2n - 2$ $g_n'(x) < 0$ alors g_n est décroissante. $\boxed{\text{0,25 point}}$

Tableau de variation $\boxed{\text{0,25 point}}$

x	$-\infty$		$2n-2$		$+\infty$
signe de f'		-	0	+	
f	$2n$	$\searrow$	$g_n(2n-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g_n(2n-2) = 2n - e^{2n-1}$

$g_n(2n-2) = 2n - e^{2n-1}$

2°) a) **Calcul de $g_n(-1)$ et le signe de $2n - e^{2n-1}$**

$g_n(-1) = 0$ et $n \geq 1$ alors $2n - 2 \geq 0 \geq -1$

sur $]-\infty\,; 2n-2[$ g_n est strictement décroissante donc $g_n(2n-2) < g_n(-1) = 0$

$g_n(2n-2) = 2n - e^{2n+1} < 0.$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

b) **Existence et unicité de α_n**

sur l'intervalle $]\,2n-2\,; +\infty[$, g_n est strictement croissante et continue ;

g_n réalise une bijection de $]2n-2\,; +\infty[$ sur $]2n - e^{2n-1}\,; +\infty[$. 0 est une valeur intermédiaire, alors il existe d'après la propriété des fonctions continues strictement monotone un unique réel α_n tel que :

$g_n(\alpha_n) = 0$ avec $\alpha_n \in\,]\,2n-2\,; +\infty[$. $\boxed{\text{0,5 point}}$

c) **localisation de α_n**

$g_n(2n-2) < 0$ déjà démontré, $g_n(2n-1) = 2n > 0$

g_n est continue sur l'intervalle $]2n-2\,; 2n-1[$ et $g_n(2n-2)$, $g_n(2n-1)$ sont de signes contraires.

l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution dans cet intervalle

alors $\alpha_n \in\,]2n +\,; 2n-1[$ pour tout n> 0 $\boxed{\text{0,25 point}}$

ainsi $2n - 2 < \alpha_n < 2n - 1 < 2n < \alpha_{n+1} < 2n + 1$ càd la suite (α_n) est croissante $\boxed{\text{0,25 point}}$

3°) a)**Le signe de g_n**

d'après ce qui précède : $\boxed{\text{0,25 point}}$

x	$-\infty$		-1		α_n		$+\infty$
$g_n(x)$		+	0	-	0	+	

b) **les coordonnées de M_n et lieu des points M_n**

La courbe représentative de g_n admet un minimum en $x = 2n - 2$ donc M_n est le point de coordonnées $M_n(2n-2\,; 2n - e^{2n-1})$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

le lieu des points M_n est la courbe d'équation y = f(x), on trouve cette équation en exprimant l'ordonnée de M_n en fonction de son abscisse ; or $2n - e^{2n-1} = 2 + (2n-2) - e^{(2n-2)+1}$

donc $f(x) = 2 + x - e^{x+1}$ $\boxed{\text{0,25 point}}$

Partie B (3,75 points)

1°) a) La continuité de f_n en -1

$n \in \mathbb{N}^*$, alors $2n \geq 2$ on sait aussi que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, en utilisant un changement de variable

$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = \frac{X^{2n}}{1-e^X} = X^{2n-1} \times \frac{X}{1-e^X}$ par produit on obtient :

$\lim\limits_{x \to -1} f_n(x) = 0 = f_n(-1)$ $\quad f_n$ est continue en -1 par suite sur $\mathbb{R}$ tout entier. 0,25 point

b) **dérivabilité en - 1**

cas n = 1

$\frac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1} = \frac{x+1}{1-e^{x+1}} = \frac{X}{1-e^X}$ *avec* $X = x+1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

f_n est dérivable en -1 et $f_n'(-1) = -1$ car $\lim\limits_{X \to 0} \frac{X}{1-e^X} = -1$ 0,25 point

cas n > 1(2n > 2)

$\frac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1} = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = X^{2n-1} \times \frac{X}{1-e^X}$ *avec* $X = x+1$

on déduit que $f_n'(-1) = 0$,

f_n est dérivable en 0 et par suite dérivable sur $\mathbb{R}$ 0,25 point

2°) a) **Les limites en -∞ et en +∞**

en -∞

$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = \frac{X^{2n}}{1-e^X}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{X^{2n}}{1-e^X} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ 0,25 point

en +∞

$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}} = \frac{X^{2n}}{1-e^X} = \frac{X^{2n}}{e^X} \times \frac{1}{e^{-X} - 1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{2n}}{e^x} = 0$ et par produit on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ 0,25 point

Les courbes (C_n) admettent l'axe (Ox) comme asymptote en +∞.

b) **Calcul de la dérivée de f_n**

pour $x \neq -1$ f_n est le quotient de deux fonctions dérivables, alors elle est dérivable et on trouve :

$f_n'(x) = \frac{(x+1)^{2n+1}\left[2n + e^{x+1}(-2n + x + 1)\right]}{(1-e^{x+1})^2}$ c'est-à-dire : 0,25 point

$f_n'(x) = \frac{(x+1)^{2n-1}}{(1-e^{x+1})^2} \times g_n(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1-e^{x+1}}\right]^2 \times (x+1)g_n(x)$ 0,25 point

les calculs détaillés sont exigés

c) **Sens et tableau de variation**

f_n' a le même signe que le produit $(x+1)_n g_n(x)$.

tableau des signes (n > 1)

x	$-\infty$		-1		α_n		$+\infty$
$(x+1)$		-	0	+		+	
$g_n(x)$		+		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	-	0	+	

Pour $x \leq \alpha_n$ $\quad f'(x) \leq 0$ $\quad$ alors f_n est décroissante sur $]-\infty ; \alpha_n[$ 0,25 point

Pour $x \geq \alpha_n$ $\quad f'(x) \geq 0$ $\quad f_n$ est croissante sur $]\alpha_n ; +\infty[$

Partie C (2,25 points)

p est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

Soit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p - 2; 2p - 1]$; par :

$$h_p(x) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2p - 2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier n.}$$

1°) **Equations équivalentes sur I_p**

pour tout x $\in \mathbb{R}$, $e^{x+1} > 0$ (on pourra diviser donc par e^{x+1})

$g_p(x) = 0 \Leftrightarrow 2p + (-2p + x + 1)\, e^{x+1} \Leftrightarrow \frac{2p}{e^{x+1}} - 2p + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}} = x \Leftrightarrow h_p(x) = x$ 0,25 point

2°)a) **localisation de h_p (x) et majoration de la dérivée**

$h_p'(x) = \frac{2p}{e^{x+1}} > 0$, sur I_p h_p est croissante alors : $h_p(2p - 2) \leq h_p(x) \leq h_p(2p - 1)$

$h_p(2p - 2) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{2p-1}}$ et $2p - e^{2p-1} < 0$ d'après A° 2°)a) $\Leftrightarrow \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1$

$\frac{2p}{e^{2p-1}} < 1 \Leftrightarrow -\frac{2p}{e^{2p-1}} > -1$ alors $h_p(2p - 2) > 2p - 2$ 0,25 point

$h_p(2p-1) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{2p}} < 2p - 1$ 0,25 point

on conclut que $h_p(x) \in I_p$

majoration de la dérivée

$h_p'(x) = \frac{2p}{e^{x+1}} > 0$ la fonction $x \to e^x$ est strictement croissante sur I_p

pour tout x $\in I_p$ on a $e^{2p-1} < e^{x+1} < e^{2p}$ par passage aux inverse et multiplication par 2p on obtient bien que : $h_p'(x) = \frac{2p}{e^{x+1}} < \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1$ la dernière inégalité a été établie plus haut grâce à A2°) a). 0,25 point

3°) a) **Les $u_n \in I_p$** 0,25 point

$u_0 \in I_p$ puisque si x $\in I_p$ $h_p(x) \in I_p$ alors $u_1 = h_p(u_0) \in I_p$ par récurrence on établit que tous les $u_n \in I_p$

b) **Les accroissements finis**

h_p est dérivable sur I_p, sa dérivée est bornée par k_p sur I_p, les $u_n \in I_p$ et $\alpha_n \in I_p$ de plus $h_p(\alpha_n) = \alpha_n$ alors :

$|h_p(u_n) - h_p(\alpha_n)| \leq k_p |u_n - \alpha_n|$ 0,25 point

en écrivant cette relation pour tous les entiers consécutifs de 1 à n on obtient après simplifications :

$0 \leq |u_n - \alpha_p| \leq k_p^{\,n}$ 0,25 point

$k_p < 1$ alors $\lim k_p^{\,n} = 0$ (suite géométrique de raison < 1) 0,25 point

par suite u_n converge et $\lim u_n = \alpha_n$ 0,25 point

Partie D (2,25 points)

$v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx$ pour tout n $\in \mathbb{N}^*$

1°) a) **Existence de v_n**

f_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle $[-1 ; -1 + \frac{1}{n}]$,

elle y admet des primitives d'où l'existence de v_n 0,25 point

b) **$v_n \leq 0$**

$[-1 ; -1 + \frac{1}{n}] \subset [-1 ; 0]$, pour tout n ≥ 1 f_n est négative sur $[-1 ; 0]$, l'intégrale d'un fonction négative sur $[a,b]$ est négative, d'où $v_n \leq 0$. 0,25 point

Tableau de variations $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

x	$-\infty$		-1		α_n		$+\infty$
signe de f_n'			-			+	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\nearrow$	0

3°) a) **<u>les points communs des courbes (C_2) et (C_3)</u>**

on sait que : $f_n(-1) = 0$ alors A(-1 ; 0) est un point commun à toutes les courbes.

Pour $x \neq -1$ après simplifications :

$f_2(x) = f_3(x) \Leftrightarrow (x+1)^4 = (x+1)^6 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$ $\qquad f_2(0) = \dfrac{1}{1-e}$ et $f_2(-2) = \dfrac{1}{1-e^{-1}}$

On a deux autres points communs $B\left(0 ; \dfrac{1}{1-e}\right)$, $C\left(-2 ; \dfrac{1}{1-e^{-1}}\right)$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

b) **<u>position relative des courbes (C_2) et (C_3)</u>**

$$f_2(x) - f_3(x) = \frac{-x(x+1)^4(x+2)}{1-e^{x+1}}$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x		-		-		-	0	+	
$(x+2)$		-	0	+		+		+	
$e^{x+1}-1$		-		-	0	+		+	
$f_2 - f_3$		-	0	+	0	-	0	+	

(C_2) est en dessous de (C_3) sur $]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 0[$

(C_2) est au dessus de (C_3) sur $]-2 ; -1[\cup]0 ; +\infty[$ $\boxed{0{,}25 \text{ point}}$

<u>Représentations graphiques de (C_2) et (C_3)</u> $2 < \alpha_2 < 3 < 4 < \alpha_3 < 5$

Apprécier si malgré la calculatrice le candidat est capable de représenter une fonction dont les valeurs sont grandes, même partiellement, (unité 2cm). $\boxed{1 \text{ point}}$

$\dfrac{1}{1-e} \simeq -0{,}6$ $\qquad \dfrac{e}{e-1} \simeq 1{,}6$ $\qquad f_2(2) \simeq -4{,}2$ $\qquad f_2(3) \simeq -4{,}7$ $\qquad f_2(6) \simeq -2{,}1$ $\qquad f_3(1) \simeq -10$ $\qquad f_3(2) \simeq -38{,}2$

c) **(v_n) est croissante**

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est négative sur [-1 ;0] et donc sur tout sous- intervalle de [-1 ;0]

n+1> n entraîne $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $-1 + \frac{1}{n+1} < -1 + \frac{1}{n}$, d'après la relation de Chasles :

$$v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_n(x)dx + \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx = \cancel{v_{n+1}}_{\,n} + \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx$$

Voir en bas car erreur du correcteur officiel.

$$v_{n+1} - v_n = - \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx \geq 0 \text{ car } f_n < 0 \text{ sur } [-1+\frac{1}{n+1} ; -1 + \frac{1}{n}]$$ $\boxed{0{,}5\text{ point}}$

la suite (v_n) est donc croissante et majorée par 0 alors elle converge. $\boxed{0{,}25\text{ point}}$

2°) **a) Encadrement de f_n sur [-1 ;0]**

f_n décroît sur [-1 ;0] pour tout x ∈[-1 ;0] on a donc $f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(-1)$

or $f_n(0) = \frac{1}{1-e}$ et $f_n(-1) = 0$ d'où : $\frac{1}{1-e} \leq f_n(x) \leq 0$ $\boxed{0{,}5\text{ point}}$

b) **Inégalité et intégrale, limite**

on intègre membre à membre l'inégalité précédente ce qui donne :

$\frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$ $\boxed{0{,}25\text{ point}}$

d'après le « théorème des gendarmes » $\lim v_n = 0$ $\boxed{0{,}25\text{ point}}$

Rq

$$v_{n+1} = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_{n+1}(x)\,dx \quad \text{avec} \quad f_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{2n+2}}{1-e^{x+1}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_{n+1}(x)\,dx - \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_{n+1}(x)dx - \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} f_n(x)\,dx - \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} (f_{n+1}(x) - f_n(x))\,dx - \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n+1}} \frac{(x+1)^{2n}(x^2-1)}{1-e^{x+1}}\,dx - \int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx.$$

or $\frac{x^2-1}{1-e^{x+1}} > 0$ sur $]-1 ; 1]$ et $-f_n > 0$ donc

$v_{n+1} - v_n \geq 0$ et $v_{n+1} \geq v_n$ et la suite (v_n) ↗.