BAC C R.C.I. session 91

EXERCICE I

(4 points)

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 3, et (u) la suite numérique définie par:

$$\begin{cases} u_o = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2} \end{cases}$$

1°) Démontrer que: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ u_n > 3$.

2°) Soit (v) la suite numérique définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 3}$$

a) Montrer que (v) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Déterminer v_n en fonction de n.

3°) En déduire lim(v) puis lim(u).

EXERCICE II

(4 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Soit A et A' les points d'affixes respectives -1 et 1. Soit z_1 un nombre complexe donné, ni réel ni imaginaire pur.

On considère les nombres complexes z et z' liés par les relations:

$$\begin{cases} z z' = 1 \\ 2 z_1 = z + z' \\ \mathrm{Im}(z) > 0 \end{cases}$$

Im(z) *désignant la partie imaginaire du nombre complexe z*

1°) Démontrer les relations: $\dfrac{z-1}{z+1} = -\dfrac{z'-1}{z'+1}$ (1)

$$\frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} = \left[\frac{z-1}{z+1}\right]^2 \qquad (2)$$

2°) On note M, M' et M_1 les points d'affixes respectives z, z' et z_1.

a) Exprimer $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$ en fonction d'une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}})$

b) Déduire de la relation (1) que les points A, A', M et M' appartiennent à un même cercle (C). Préciser les positions relatives des points M et M' par rapport à la droite (Δ) passant par O de vecteur directeur $\vec{u}$.

c) Soit Ω le centre du cercle (C). Déduire de la relation (2) que les points A, A', Ω et M_1 sont cocycliques. Précisez les positions relatives de Ω et M_1 par rapport à la droite (Δ).

d) Démontrer que les droites ($ΩM_1$) et (MM') sont perpendiculaires.

3°) Le point M_1 étant donné, utiliser les résultats de la question 2°) pour indiquer une construction des points M et M' correspondants.

PROBLEME

(12 points)

ln *désigne la fonction logarithme népérien.*

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall\ x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \\ f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

Les résultats d'une partie non traitée pourront être utilisés dans les parties suivantes.

Partie I:

1°) Soit h la fonction définie par :

$$h : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{-4x}{x^2 - 1} + 2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$

Etudier les variations de h sur son ensemble de définition.

2°) Du calcul de h(0) et de $\lim\limits_{+\infty} h$, déduire que:

$$\forall\, x \in [0, 1[\quad h(x) \geq 0$$
$$\text{et} \quad \forall\, x \in]1, +\infty[\quad h(x) < 0$$

On ne cherchera pas à déterminer la limite de h quand x tend vers 1.

Partie II

1°) Soit g la fonction définie par:

$$g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2$$

Etudier les variations de g sur son ensemble de définition.

2°) Préciser la limite de g en 1.

3°) a) Justifier que :

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x-1}{2}\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right] = 1.$$

b) Démontrer que: $\lim\limits_{+\infty} g = 2$

4°) a) Déduire des questions précédentes qu'il existe un nombre réel unique α, élément de] 0; 1[tel que g(α) = 0.

b) Démontrer que : 0,6 < α < 0,7.

(Pour les calculs on utilisera une machine ou les indications suivantes: $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}70$ *et* $1{,}73 < \ln \dfrac{17}{3} < 1{,}74$ *)*

Partie III

Etude de f.

1°) Etudier la parité de f.

2°) a) Démontrer que f est continue en 1.

b) f est-elle dérivable en 1?

que peut-on en déduire pour la représentation graphique (C_f) de f?

3°) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4°) a) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.

b) On admettra que :

$$\lim_{x \to +\infty}[\, f(x) - 2x - 1\,] = 0.$$

Que peut-on en déduire pour (C_f)?

c) Utiliser l'égalité g(α) = 0 pour démontrer que : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$

d) Tracer (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité 2 cm). On indiquera les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse -1; 0; 1 ; α et - α.