MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA JEUNESSE, DES SPORTS
CHARGE DE LA CONDITION FEMININE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE D'ETAT DE PORT-GENTIL
B.P. 236 55.21.73

Série : C
Coeff. : 5
Durée : 4 h.

BAC BLANC 1 (2000)
Epreuve de Mathématiques

EXERCICE I (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $-2+3i$ et B le point d'affixe $1-3i$.
Soit M le point d'affixe z ($z \neq -2+3i$) ; à z on associe le nombre complexe z' tel que : $z' = \dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$.

1°) a) Etablir une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.

2°) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $|z'| = 2$.

3°) Déterminer l'affixe du point commun K à (E_1) et (E_2).

EXERCICE II (5 points)

Dans tout 'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2

1°) a) Résoudre l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{n}y = 0 \quad (1)$$

b) On considère l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)} \quad (2)$$

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction affine g définie sur IR par $g(x) = ax + b$ soit solution de (2).

2°) a) Montrer que pour que la fonction h définie sur IR soit solution de (2), il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (1).

b) En déduire toutes les solutions de (2).

c) Déterminer celle de ces solutions, f, vérifiant $f(0) = 0$

3°) On considère la fonction f_n définie sur IR par :

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}.$$

a) Etudier le signe de f'_n. En déduire le tableau de variation de f_n. On montrera en particulier que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.

b) Montrer que la courbe C_n représentant f_n admet une asymptote dont on précisera l'équation. Tracer C_2.

c) Montrer que sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique x_n.

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1 \text{ et } f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \text{ si } t \in]0, 1[.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Partie A.

1°) a) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$. Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ a le même signe $\varphi(t)$, ou φ est la fonction définie sur $]0, 1[$ par $\varphi(t) = \ln t - 1 + \dfrac{1}{t}$.

c) Etudier les variations puis le signe de φ ; en déduire le signe de f'.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en déduire pour la tangente à $\mathcal{C}$ au point O.

3°) a) Prouver que pour tout élément u de $[0, \dfrac{1}{2}]$

$$0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2.$$

En déduire que :

$$0 \leq -\ln(1-u) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) \leq \frac{2u^3}{3}.$$

b) Soit g la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Prouver que pour tout élément h de $[-\dfrac{1}{2}, 0]$,

$$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}.$$

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.

c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

4°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (unité graphique : 10 cm.)

Partie B.

Pour tout élément x de $]0, 1]$, on pose :

$$I(x) = \int_x^1 f(t)\,dt \text{ et } J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales).

1°) Soit K la fonction définie sur $]0, 1]$ par :

$$K(x) = J(x^2) - J(x).$$

a) Montrer que K est dérivable sur $]0, 1]$ et que :

$$K'(x) = \frac{1}{x}\,[f(x) - 2f(x^2)].$$

b) Prouver que, pour tout élément x de $]0, 1]$

$$f(x) - 2f(x^2) = -x f(x).$$

c) En déduire que, pour tout élément x de $]0, 1]$,

$$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}\,dt. \quad (1)$$

2°) Calculer la dérivée de la fonction $t \longrightarrow \ln(-\ln t)$ sur $]0, 1[$. En déduire que pour tout élément x de $]0, 1[$,

$$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}\,dt = \ln 2. \quad (2)$$

3°) Prouver que, pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout élément t de $]0, x[$,

$$0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}.$$

En déduire que, pour tout élément x de $]0, 1[$,

$$0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t}\right| \leq \frac{-x}{\ln x}. \quad (3)$$

4°) A partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.

5°) Etablir que, pour tout élément x de $]0, 1]$,

$$I - I(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

En déduire que : $0 \leq I - I(x) \leq x$

6°) Prouver finalement que $I = \ln 2$

BAC BLANC 1 (2000)

Correction Mathématiques

EXERCICE I (4 points)

1°) a) $\arg(z') = \arg(\frac{z-1+3i}{z+2+3i}) = \arg(z-1+3i) - \arg(z+2+3i)$. Or A le point d'affixe $-2+3i$ et B le point d'affixe $1-3i$ et M le point d'affixe z.

$\arg(z') = \arg(z - z_B) - \arg(z - z_A)$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z') = (\vec{u}, \overrightarrow{MB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{MA})$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z') = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ $[2\pi]$.

b) l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$ est l'arc de cercle de diamètre [AB] n'appartenant pas au même demi-plan de frontière [AB] que la demi-droite [AL) telle que $(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$..

2°) $M \in (E_2) \Leftrightarrow |z'| = 2 \Leftrightarrow MA = 2MB \Leftrightarrow$

$MA^2 - 4MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0$.

Soit en introduisant les points P et Q barycentre respectifs de { (A,1), (B,-2) } et { (A,1), (B,2)} :

$-3\,\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = 0$ donc M décrit le cercle de diamètre [PQ].

3°) K point commun à (E_1) et (E_2) $\Leftrightarrow |z'| = 2$ et $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ donc $z' = 2i$

d'où $z - 1 + 3i = 2i(z + 2 - 3i) \Leftrightarrow$

$(1-2i)z = 1 - 3i + 4i + 6 \Leftrightarrow z = \frac{7+i}{1-2i} = 1 + 3i$.

EXERCICE II (5 points)

1°) a) L'équation différentielle $y' - \frac{1}{n}y = 0$ (1) a pour solution générale $y = C\,e^{\frac{x}{n}}$

b) $y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)}$ (2)

$g(x) = ax + b$ solution de (2) $\Leftrightarrow a - \frac{1}{n}(ax+b) = \frac{x+1}{n(n+1)}$ pour tout x donc, par identification on obtient : $a = \frac{1}{n+1}$ et $b = 1$. Une solution particulière de (2) est donc la fonction

$$g(x) = \frac{1}{n+1}x + 1$$

2°) a) Cette démonstration se fait en deux temps, d'abord on prend comme hypothèse que h est solution de (2) et on démontre que h - g est solution de (1) puis que h - g solution de (1) entraîne que h est solution de (2)..

b Toutes les solutions de (2) sont donc obtenues en ajoutant à la solution particulière de (2) la solution générale de (1).

Les solutions générales de (2) sont donc de la forme

$h(x) = C\,e^{\frac{x}{n}} + \frac{1}{n+1}x + 1$

c) La solution, f, vérifiant $f(0) = 0$ doit donc vérifier $C + 1 = 0$ soit $C = -1$. D'où $f(x) = \frac{1}{n+1}x + 1 - e^{\frac{x}{n}}$.

3°) On considère la fonction f_n définie sur IR par :

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}.$$

a) $f'_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}$.

$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq n\ln\frac{n}{n+1}$.

La fonction f_n est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\, n\ln\frac{n}{n+1}.[$ et décroissante sur l'intervalle $]\,n\ln\frac{n}{n+1}.\,;+\infty[$. Elle admet donc un maximum pour $x_0 = n\ln\frac{n}{n+1}$. Or $0 \in\,]\,n\ln\frac{n}{n+1}.\,;+\infty[$ et comme f_n est décroissante sur cet intervalle on a $x_0 < 0$ donc $f_n(x_0) > f_n(0)$ c'est-à-dire $f_n(x_0) > 0$. De plus : $f_n(x_0) = \frac{1 + n[\ln n - \ln(n+1)]}{n+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f_n(x) - \frac{1}{n+1}x - 1] = \lim\limits_{x\to-\infty} -e^{\frac{x}{n}} = 0^-$

La droite d'équation $y = \frac{1}{n+1}x + 1$ est donc asymptote à C_n en $-\infty$. La droite est au-dessus de la courbe sur cet intervalle.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n+1}x + 1 - e^{\frac{x}{n}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{n}\left[\frac{n}{n+1} + \frac{n}{x} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right] = -\infty$

3°) Sur l'intervalle $]-\infty\,;x_0[$, on a vu que la fonction était croissante et continue, sa restriction définit donc une bijection de cet intervalle sur $]-\infty\,;f_n(x_0)[$ or nous avons déjà démontré que $0 \in\,]-\infty\,;f_n(x_0)[$ donc il existe x_n, unique, sur l'intervalle $]-\infty\,;x_0[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

PROBLEME (11 points)

On considère la fonction f définie sur [0 , 1] par :

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1 \text{ et } f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \text{ si } t \in\,]0, 1[.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)\,dt$.

Partie A.

1°) a) f est continue en 0 et en 1.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{\ln x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to0} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x = -\infty$. d'où, puisque $f(0) = 0$, f est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x} = 1$ car on sait que $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$.

D'où, puisque de plus $f(1) = 1$, f est continue en 1.

b) f est dérivable sur] 0 , 1 [car f est, sur cet intervalle une fonction ~~rationnelle~~ dont le dénominateur ne s'annule pas..

$$f'(t) = \frac{1}{t}(\ln t - 1 + \frac{1}{t}) = \frac{1}{t}\varphi(t),$$

c) $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} < 0$ sur] 0 ; 1 [, la fonction φ est donc décroissante sur cet intervalle de plus $\varphi(1) = 0$

Donc comme $f'(t)$ a le même signe que $\varphi(t)$, on en déduit que sur] 0 ; 1 [, $f'(t) > 0$.

2°) Dérivabilité de f en 0 :

$\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t\to0}\frac{t-1}{t\ln t} = +\infty$ car $\lim\limits_{t\to0} t\ln t = 0^-$.

D'où f n'est pas dérivable en 0 mais la tangente à C au point O est verticale.

3°) a) $\frac{1}{1-u} - (1+u) = \frac{u^2}{1-u}$ alors, si $u \in [0, \frac{1}{2}]$,

$0 \leq u \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - u \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{1-u} \leq 2$ soit, plus précisément :

$$0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) = \frac{u^2}{1-u} \leq 2u^2.$$

$$0 \leq \int_0^x \frac{1}{1-u} - (1+u)\,du \leq \int_0^x 2u^2\,du$$

$$0 \leq [-\ln(1-u) - (u + \frac{u^2}{2})]_0^x \leq [\frac{2u^3}{3}]_0^x \text{ soit :}$$

$$0 \leq -\ln(1-x) - (x + \frac{x^2}{2}) \leq \frac{2x^3}{3}$$

b) Soit g la fonction définie sur] 0 , 1] par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Soit h élément de $[-\frac{1}{2}, 0]$, alors :

$g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} = \frac{\ln(1+h)}{h} - 1 + \frac{h}{2}$

$g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} = \frac{1}{h}[\ln(1+h) - h + \frac{h^2}{2}]$

Ce qui nous donne en posant $h = -u$ et u élément de $[0, \frac{1}{2}]$

$g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} = \frac{1}{u}[-\ln(1-u) - (u + \frac{u^2}{2})] \leq \frac{1}{u}\frac{2u^3}{3}$ soit :

$$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}.$$

D'où $\lim\limits_{h\to0}\frac{2h}{3} \leq \lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h) - g(1)}{h} + \frac{1}{2} \leq 0$ ce qui implique que

$\lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h) - g(1)}{h} + \frac{1}{2} = 0$ soit que $\lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = -\frac{1}{2}$, la fonction g est donc dérivable en 1 et $g'(1) = -\frac{1}{2}$.

c) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ donc $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ pour tout x et en particulier $f'(1) = -g'(1)\,f^2(1) = \frac{1}{2}$.

4°) Tracer la courbe C (unité graphique : 10 cm.)

Partie B.

Pour tout élément x de] 0 , 1], on pose :

$$I(x) = \int_x^1 f(t)\,dt \text{ et } J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$$

1°) Soit K la fonction définie sur] 0, 1] par :

$$K(x) = J(x^2) - J(x) = \int_{x^2}^1 \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$$

$= \int_{x^2}^1 \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{x^2}^x \frac{f(t)}{t}\,dt$. Alors si Q est une primitive de $\frac{f(t)}{t}$ on a alors

$$K(x) = Q(x) - Q(x^2).$$

La fonction Q étant dérivable et ayant pour dérivée la fonction $\frac{f(t)}{t}$ on en déduit que la fonction K est dérivable et a pour dérivée

$K'(x) = Q'(x) - 2x\,Q'(x^2) - = \frac{f(x)}{x} - 2x\frac{f(x^2)}{x^2} \Leftrightarrow$

$K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)]$.

b) Pour tout élément x de] 0 , 1]

$f(x) - 2f(x^2) = \frac{1-x}{\ln x} - 2\frac{1-x^2}{\ln x^2} = \frac{1-x}{\ln x}[1 - (1+x)]$

$= -x\,f(x)$.

c) $I(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 2\frac{f(t^2)}{t} - \frac{f(t)}{t}\,dt$

$= \int_x^1 -K'(t)\,dt = K(x) - K(1) = \int_{x^2}^x \frac{f(t)}{t}\,dt$

$= \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t\ln t}\,dt$ (1)

2°) $\Phi(t) = \ln(-\ln t)$ sur] 0, 1 [. $\Phi'(t) = \frac{1}{t\ln t}$

$\int_{x^2}^x \frac{-1}{t\ln t}\,dt = -\int_{x^2}^x \Phi'(t)\,dt = \Phi(x^2) - \Phi(x) = \ln(-\ln(x^2)) - \ln(-\ln x) = \ln(-2\ln x) - \ln(-\ln x) = \ln 2$. (2)

3°) Pour tout élément t de] 0, x [, $0 < t < x < 1$ on a $\ln t < \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < -\ln x < -\ln t$ donc comme la fonction inverse est décroissante,

$$0 \leq -\frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}.$$

En déduire que, pour tout élément x de] 0, 1 [,

$0 \leq \left|\int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t}\right| \leq \left|\int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln x}\right| \leq \left|\frac{1}{\ln x}\right|\int_{x^2}^x dt = \left|\frac{1}{\ln x}\right|(x - x^2)$

$\left|\frac{1}{\ln x}\right|(x - x^2) \leq x\left|\frac{1}{\ln x}\right| \leq \frac{-x}{\ln x}$. (car $\ln x < 0$) (3)

4°) $I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t\ln t}\,dt = \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\,dt + \int_{x^2}^x \frac{-1}{t\ln t}\,dt$

Soit $I(x) = \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\,dt + \ln 2 \Leftrightarrow$

$I(x) - \ln 2 = \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\,dt$ $|I(x) - \ln 2| = \left|\int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln t}\right| \leq \frac{-x}{\ln x}$.

Or $\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{\ln x} = 0$ donc

$\lim\limits_{x\to0}|I(x) - \ln 2| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} I(x) = \ln 2$

5°) Pour tout élément x de] 0, 1],

$$I - I(x) = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_x^1 f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt.$$

$0 \leq I - I(x)$ d'après le théorème de la positivité de l'intégrale. $I - I(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,dt$. Or $f(t) \leq 1$ donc d'après le théorème de comparaison

$I - I(x) = \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x dt \Leftrightarrow I - I(x) \leq x$.

En conclusion $0 \leq I - I(x) \leq x$.

6°) D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que $\lim\limits_{x\to0} I(x) = I = \ln 2$.

Problème