MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA JEUNESSE, DES SPORTS
CHARGE DE LA CONDITION FEMININE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE D'ETAT DE PORT-GENTIL
B.P. 236 55.21.73

Série : C
Coeff. : 5
Durée : 4 h.

BAC BLANC 2 (2000)
Epreuve de Mathématiques

EXERCICE I (4 points)

On considère un dé cubique dont 4 faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.

1°) Calculer la probabilité d'avoir :

a) Une face blanche.

b) Une face noire.

2°) On jette le dé quatre fois de suite.

a) Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche ; une face noire ; une face blanche ; une face blanche.

b) Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers.

c) Calculer la probabilité d'avoir une face noire au $4^{ème}$ lancer (une face noire pouvant apparaître au cours des autres lancers).

3°) Soit n un entier naturel non nul.

a) Calculer la probabilité p_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $p_n \geq 0,99$.

EXERCICE II (5 points)

Dans le plan orienté (P), on donne deux points distincts A et B et on désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M de (P), on note M′ l'image de M par r_1 et M″ l'image de M′ par r_2.

1°) a) Démontrer que le milieu J du segment [M M″] est un point fixe pour $r_2 \circ r_1$.

b) Construire soigneusement J et prouver que J est situé sur le cercle de diamètre [AB].

(On prendra AB = 10 cm)

2°) Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (M M′).

a) Préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s de centre A qui transforme H en M.

b) Démontrer que M, M′, M″ sont alignés si et seulement si H est situé sur le cercle de diamètre [A J].

c) En déduire l'ensemble (C), des points M du plan (P) pour lesquels M, M′, M″ sont alignés.

3°) a) Exprimer M′ M en fonction de A M′ puis M′ M″ en fonction de B M′.

b) Où se situe le point M′ lorsqu'on a l'égalité
M′ M″ = $\sqrt{3}$ M′ M ?

c) Trouver (Δ) ensemble des points M du plan (P) tels que M′ M″ = $\sqrt{3}$ M′ M .

PROBLEME (11 points)

Partie A.

Soit Φ la fonction numérique définie par :

$\Phi(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ si $x > 0$ et $\Phi(0) = 0$.

1°) Démontrer que Φ est une fonction continue sur son ensemble de définition.

2°) a) Etudier la dérivabilité de Φ en 0.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction Φ.

3°) a) Etudier le comportement asymptotique de Φ pour les grandes valeurs de x.

b) Préciser la tangente (T) à la courbe (C), représentative de Φ, au point d'abscisse e.

c) Tracer (C) et (T) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

4°) Démontrer que l'équation Φ(x) = e admet exactement deux solutions dans l'intervalle] 1 ; + ∞ [et que l'une de ces solutions est comprise entre e^3 et e^4.

Partie B.

Dans cette partie on considère la fonction f définie sur] 1 ; + ∞ [par $f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t}$. Le but est de représenter graphiquement cette fonction sans connaître l'expression explicite de f(x).

1°) a) Justifier l'existence de f.

b) Démontrer que f est croissante sur] 1 ; + ∞ [.

2°) a) Etablir que pour tout nombre réel t appartenant à] 1 ; + ∞ [on a : $\ln t < t - 1$.

b) En déduire une minoration de f(x) lorsque x > e. Préciser alors la limite de f(x) lorsque x tend vers + ∞.

c) De façon analogue, calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

3°) a) Soient a et b deux réels tels que : $e \leq a < b$.

Etablir que : $\frac{b-a}{\ln b} \leq \int_a^b \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{b-a}{\ln a}$.

b) Soit x un réel strictement supérieur à e.
démontrer que $0 < f(x) < x$

c) Démontrer que : pour tout u tel que $e \leq u < x$ alors : $\frac{x-u}{\ln x} \leq f(x) \leq u + \frac{x-u}{\ln u}$.

d) Résoudre l'inéquation $\Phi(x) < x$.
Justifier que l'on peut choisir $u = \Phi(x)$ lorsque $x > e^4$.
Etablir alors que :
$\forall x > e^4, 1 - \frac{\Phi(x)}{x} \leq \frac{\ln x}{x}.f(x) \leq \frac{1}{\ln x} + [1 - \frac{\Phi(x)}{x}]\frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}$.

e) Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)} = 1$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}.f(x) = 1$.

f) Vérifier que l'on a l'égalité :
$\forall x > e^4, f(x) = \frac{x}{\ln x}[1 + \varepsilon(x)]$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

g) En déduire le comportement asymptotique de la fonction f lorsque x tend vers + ∞.

4°) a) On cherche à obtenir une valeur approchée de f(2) :
Soit h la fonction telle que $h(t) = a\,t + b$ et $h(e) = 1$ et $h(2) = \frac{1}{\ln 2}$.
Calculer les réels a et b et donner deux valeurs approchées de ces réels à 10^{-2} près. On utilisera ces valeurs approchées pour la question 4b).

b) On prend alors $f(2) \approx \int_e^2 h(t)\,dt$. Calculer cette valeur.

5°) a) Donner le tableau de variation de f.

b) Construire la courbe représentative de cette fonction f.

Correction TC n° 13

EXERCICE I

On considère un dé cubique dont 4 faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.

1°) Soit Ω l'univers des possibles. Une éventualité de Ω est l'obtention d'une face du dé parmi 6, donc card $\Omega = C_6^1 = 6$.

Soit A l'événement « obtenir une face blanche ». Une éventualité de A est le tirage d'une face blanche prise parmi 4,

card A $= C_4^1 = 4$ d'où $p(A) = \frac{2}{3}$.

Soit B l'événement « obtenir une face noire ». B est l'événement contraire de A donc $p(B) = 1 - p(A) = \frac{1}{3}$.

2°) a) Soit C l'événement {(blanche, noire, blanche, blanche)}.

C = AxBxAxA donc $p(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$.

b) D l'évéenement « obtenir une seule face noire » Nous sommes, ici, en présence d'un processus de Bernoulli, où l'épreuve élémentaire est le jet d'un dé, où la réussite est l'obtention d'une face blanche avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ (l'échec est obtenir une face noire avec une probabilité de $\overline{p} = \frac{1}{3}$) qui se répète 4 fois et pour laquelle on désire obtenir 3 réussites exactement.

$$p(D) = C_4^1 p^3 \overline{p}^1 = \frac{32}{81}$$

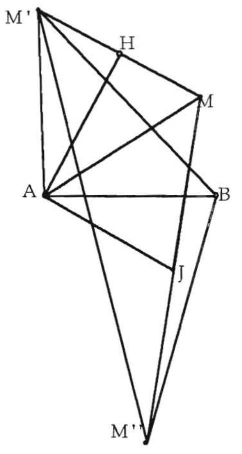
c) E l'événement « obtenir une face noire au 4ème lancer » se ramène à lévéneement obtenir une face noire dans l'épreuve simple Ω. D'où $p(E) = \frac{1}{3}$

3°) a) Soit F l'événement « obtenir au moins une face blanche ». On a alors $\overline{F}$ est l'événement « obtenir aucune face blanche ». Pour $\overline{F}$, comme pour la question 2b) nous sommes en présence d'un processus de Bernoulli. D'où $p(\overline{F}) = C_n^0 p^0 \overline{p}^n = (\frac{1}{3})^n$. D'où $p_n = p(F) = 1 - (\frac{1}{3})^n$.

b) $p_n \geq 0{,}99 \iff (\frac{1}{3})^n < 0{,}01 \iff n \ln(\frac{1}{3}) < \ln 0{,}01$

$\iff n > \frac{\ln 0{,}01}{-\ln 3} \Rightarrow n \geq 4{,}191$ D'où, le plus petit entier tel que $p_n \geq 0{,}99$ est n = 5.

EXERCICE II (5 points)



Dans le plan orienté (P), on donne deux points distincts A et B et on désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M de (P), on note M′ l'image de M par r_1 et M″ l'image de M′ par r_2.

1°) a) $r_2 \circ r_1$ étant la composée de deux rotations dont la somme des angles est égale à π (donc différente de 0 modulo 2π), on en déduit que c'est une rotation d'angle π, donc plus précisément une symétrie centrale. Alors $M'' = r_2 \circ r_1 (M)$ implique que les points M″ et M. sont symétiques par rapport au centre de cette symétrie, le milieu de[M″M] est donc le centre de la symétrie. D'où, le point J est un point fixe.

b) r_1 se décompose en un produit de deux symétries orthogonales d'axes passant par A, (AB) par exemple et (D) telle que ((D), (AB)) = $\frac{\pi}{6}$ [π]. De même, r_2 se décompose en un produit de deux symétries orthogonales d'axes passant par B, (AB) par exemple et (D′) telle que ((AB), (D′)) = $\frac{\pi}{3}$ [π]. $r_2 \circ r_1$ est donc la composée des deux symétries d'axes (D) et (D′) sécantes en J (car J est le centre de la rotation $r_2 \circ r_1$.) et telles que

(D, D′) = (D, AB) + (AB, D′) = $\frac{\pi}{2}$ [π]. Le triangle AJB est donc rectangle en J et le point J appartient au cercle de diamètre [AB]

2°) Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (M M′).

a) s transforme H en M et A en A c'est donc la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{AM}{AH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (car [AH] est la hauteur dans le triangle équilatéral AM M′) et d'angle $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{6}$.

b) Si M, M′, M″ sont alignés alors (AH) ⊥ (M M′) d'où (AH) ⊥ (HJ) car les points M, H, J, M′, M″ sont alignés. Le triangle AHJ est donc rectangle en H et H appartient au cercle de diamètre [AJ].

Réciproquement si H appartient au cercle de diamètre [AJ]. on aura (HA)⊥(HJ) d'une part et (HA) ⊥ (HM). Les droites (HJ) et (HM) sont donc confondues, le point J appartient donc à la droite (M M′). Les droites (M M′) et (M M″) ont donc en commun deux points, M et J, elles sont donc confondues et les points M, M′, M″sont alignés.

D'où M, M′, M″ sont alignés si et seulement si H est situé sur le cercle de diamètre [A J].

c) Lorsque H décrit le cercle de diamètre [A J], le point M est aligné avec M′, M″. Or M est l'image de H par la similitude H, Une similitude transformant un cercle en un cercle, le point M décrit alors le cercle (C) de diamètre [AJ′] où J′= s(J).

3°) a) M′ M = AM′ car le triangle AMM′ est équilatéral. Dans le triangle B M′ M″ :

$M'M''^2 = BM'^2 + BM''^2 - 2\,BM' \times BM'' \cos(\frac{2\pi}{3}) = 3\,BM'^2$.

D'où $M'M'' = \sqrt{3}\, M'B$.

b) Lorsque $M'M'' = \sqrt{3}\, M'M$ alors M′ M = M′ B d'où M′ A = M′ B. Le point M′ appartient donc à la médiatrice de [AB].

c) D'où (Δ) ensemble des points M du plan (P) tels que $M'M'' = \sqrt{3}\, M'M$ est l'image par r_1^{-1} de la médiatrice de [AB] car $M = r_1^{-1}(M')$ et que M′ décrit la médiatrice de [AB].

PROBLEME (11 points)

Partie A

$\Phi(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ si x > 0 et $\Phi(0) = 0$.

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} x\, \frac{1}{(\ln x)^2} = 0 = \Phi(0)$, d'où Φ est continue en 0. Or comme Φ est le quotient de deux fonctions continues (ne s'annulant pas) sur]0, + ∞ [, on en déduit que Φ est continue sur [0; + ∞ [. [0 ; 1[∪]1, +∞[

2°) a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\Phi(x) - \Phi(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$. la fonction Φ est donc dérivable en 0 et son nombre dérivé est 0.

b) $\Phi'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x}{(\ln x)^4}$. Le signe de F′(x) dépend donc essentiellement de celui de $(\ln x)^2 - 2\ln x = \ln x(\ln x - 2)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{(\ln x)^2}{x}} = +\infty$ car

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{\substack{X\to +\infty \\ X=\sqrt{x}}} \frac{1}{4}\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2 = 0^+.$$

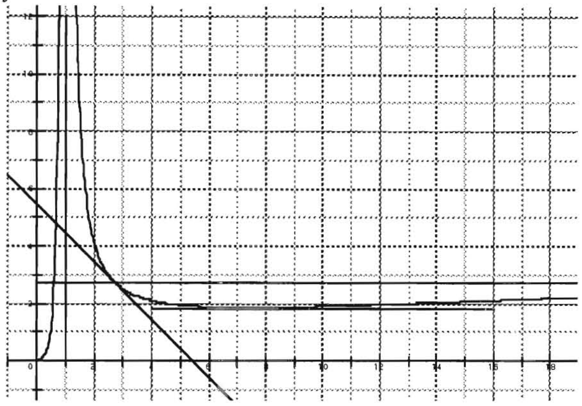
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{(\ln x)^2} = +\infty$. La droite d'équation x = 1 est donc asymptote verticale à (C).

On a donc le tableau de variation :

x	0		1		e^2		+∞
$\Phi'(x)$		+	‖	−	0	+	
$\Phi(x)$	0	↗ +∞	‖	+∞ ↘	$\frac{e^2}{4}$	↗ +∞	

3°) a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$. La courbe (C), admet donc une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction $0x$.

b) $\Phi'(e) = -1$. La tangente à (C), au point d'abscisse e est donc parallèle à la deuxième bissectrice. elle a pour équation $y = -x + 2e$.



4°) Sur l'intervalle $]\,1;\ e^2\,[$, Φ est continue et strictement décroissante, elle définit donc une bijection de l'intervalle $]\,1\,;\ e^2]$ sur $[\,\frac{e^2}{4};+\infty\,[$. Or $e < 4$ donc $\frac{e}{4} < 1$ et $\frac{e^2}{4} < e$ c'est-à-dire que e appartient à l'intervalle $[\,\frac{e^2}{4};+\infty\,[$ donc, e admet un unique antécédent dans l'intervalle $]\,1;\ e^2\,[$. On peut remarquer que $\Phi(e) = e$ donc l'antécédent de e est e.

Sur l'intervalle $]\,e^2;\ +\infty[$, Φ est continue et strictement croissante, elle définit donc une bijection de l'intervalle $]\,e\,;+\infty\,[$ sur $]\,\frac{e^2}{4};+\infty\,[$. Or $e < 4$ donc $\frac{e}{4} < 1$ et $\frac{e^2}{4} < e$ c'est-à-dire que e appartient à l'intervalle $[\,\frac{e^2}{4};+\infty\,[$ donc, e admet un unique antécédent α dans l'intervalle $]\,e^2;+\infty\,[$. De plus $\Phi(e^3) = \frac{e^3}{9}$ et $\Phi(e^4) = \frac{e^4}{16}$. On démontre facilement que $\frac{e^3}{9} < e < \frac{e^4}{16}$ donc $\Phi(e^3) < \Phi(\alpha) < \Phi(e^4)$ soit, plus exactement que $e^3 < \alpha < e^4$.

Partie B.

1°) a) Soit x de l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$, sur l'intervalle $[\,e\,;\,x\,]$, la fonction définie par $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ est continue, elle admet donc une primitive. Or, f est la primitive de g qui s'annule en e, donc f est parfaitement définie sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$.

b) Par définition de f, $f'(x) = g(x) = \frac{1}{\ln x}$. Sur $]\,1+\infty\,[$, $\ln x > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur cet intervalle.

2°) a) Soit $\varphi(t) = \ln t - t + 1$. $\varphi'(t) = \frac{1}{t} - 1$ qui est toujours négatif sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$. Donc φ est décroissante, de plus $\varphi(1) = 0$ Donc pour tout t de $]\,1\,;+\infty\,[$, $\varphi(t) < 0$, soit plus précisément : $0 < \ln t < t - 1$. D'où $\frac{1}{t-1} < \frac{1}{\ln t}$

b) Alors, lorsque $x > e$, on peut appliquer le théorème de la positivité de l'intégrale et on obtient

$$f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t} > \int_e^x \frac{dt}{t-1} = \ln(x-1) - \ln(e-1).$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-1) - \ln(e-1) = +\infty$. D'où d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si $1 < x < e$, sur l'intervalle $[\,x\,;\,e\,]$, d'après l'inégalité établie à la B2a) on en déduit que

$$f(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t} < \int_e^x \frac{dt}{t-1} = \ln(x-1) - \ln(e-1).$$

Or $\lim\limits_{x\to1} \ln(x-1) - \ln(e-1) = -\infty$. D'où d'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$.

3°) a) $e \le a < t < b \Leftrightarrow 0 < \ln a < \ln t < \ln b$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\ln b} < \frac{1}{\ln t} < \frac{1}{\ln a}$ d'où en appliquant le théorème de comparaison des intégrales (sachant que $a < b$)

$$0 < \int_a^b \frac{1}{\ln b}\,dt < \int_a^b \frac{dt}{\ln t} < \int_a^b \frac{1}{\ln a}\,dt$$

soit que : $\frac{b-a}{\ln b} \le \int_a^b \frac{dt}{\ln t} \le \frac{b-a}{\ln a}$ (A)

b) $e \le t \le x \Leftrightarrow 1 \le \ln t \le \ln x \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{\ln x} \le \frac{1}{\ln t} \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_e^x \frac{dt}{\ln t} \le \int_e^x dt = x - e \le x.$ (B)

c) En appliquant l'inégalité (A) aux réels u et x tels que : $e \le u < x$ alors : $\frac{x-u}{\ln x} \le \int_u^x \frac{dt}{\ln t} \le \frac{x-u}{\ln u}$

$\Leftrightarrow \frac{x-u}{\ln x} \le \int_u^e \frac{dt}{\ln t} + \int_e^x \frac{dt}{\ln t} \le \frac{x-u}{\ln u}$

$\Leftrightarrow \frac{x-u}{\ln x} \le f(x) - f(u) \le \frac{x-u}{\ln u}$

$\Leftrightarrow \frac{x-u}{\ln x} + f(u) \le f(x) \le f(u) + \frac{x-u}{\ln u}$

En appliquant l'inégalité (B) on obtient :

$\frac{x-u}{\ln x} \le f(x) \le u + \frac{x-u}{\ln u}$ (C)

d) $\Phi(x) < x \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{(\ln x)^2}\,[\,(\ln x)^2 - 1\,]$

$\Leftrightarrow (\ln x < -1$ ou $\ln x > 1) \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$ ou $x > e$

Sur l'intervalle $[\,\alpha\,;+\infty\,[$, la fonction Φ est croissante et donc plus particulièrement sur l'intervalle $[\,e^4\,;+\infty\,[$. De plus sur cet intervalle $\Phi(x) > \Phi(\alpha) = e$ et d'après les résultats de l'inéquation précédente, $\Phi(x) < x$. On a donc pour tout $x > e^4$, $e < \Phi(x) < x$. Voilà pourquoi, on peut poser dans l'inégalité (C), $u = \Phi(x)$ lorsque $x > e^4$. Ce qui donne alors :

$\frac{x - \Phi(x)}{\ln x} \le f(x) \le \Phi(x) + \frac{x - \Phi(x)}{\ln u}$

puis, en multipliant par le nombre positif $\frac{\ln x}{x}$:

$\forall x > e^4,\ 1 - \frac{\Phi(x)}{x} \le \frac{\ln x}{x}.f(x) \le \frac{1}{\ln x} + [\,1 - \frac{\Phi(x)}{x}\,]\frac{\ln x}{\ln \Phi(x)}.$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln \Phi(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 2\ln(\ln x)} = \lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ X=\ln x}} \frac{X}{X - 2\ln X} =$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{1 - 2\frac{\ln X}{X}} = 1$ Avec le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}.f(x) = 1$.

f) Soit alors $\forall x > e^4$, $\varepsilon(x) = \frac{\ln x}{x} f(x) - 1$ d'après la question précédente on a alors`

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln x}\,[\,1 + \varepsilon(x)\,]$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x}\,[\,1 + \varepsilon(x)\,] = 0$ donc la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction Ox.

4°) a) $a = \frac{\ln 2 - 1}{(e-2)\ln 2} \approx -0{,}61$ et $b = \frac{e - 2\ln 2}{(e-2)\ln 2} \approx 2{,}67$

b) $f(2) \approx \int_e^2 h(t)\,dt = [a\frac{t^2}{2} + b\,t\,]_e^2 = 2(a+b) - e(\frac{ae}{2} + b)$

$= -0{,}88$

5°) a)

x	1		e		$+\infty$
f'(x)		+	1	+	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$