MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE DE

L'OGOOUE-MARITIME PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE

UNION - TRAVAIL - JUSTICE

BAC BLANC COMMUN AVRIL 2011

Epreuve de MATHEMATIQUES

Serie : C & E

Durée : 4 heures

Coeff : 5

EXERCICE 1 (4 points).

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B (On prendra AB = 6 cm pour la figure).

1°) Déterminer et représenter l'ensemble (C) des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 3$.

2°) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

3°a) Placer le point C image de B par la rotation R de centre A et d'angle orienté $\frac{2\pi}{3}$.

b) Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

4° On désigne par S la similitude directe du plan qui transforme A en B et C en D .On note Ω le centre de S.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
b) Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.
c) En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.
d) Démontrer que les points Ω , A , C et D sont cocycliques.

EXERCICE 2 (5 points).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 4 cm.

On considère les nombres complexes Z_n ($n \in IN$), définis par $Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $Z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}} Z_n$, $n \in IN$.

On désigne par M_n le point image de Z_n.

1° Placer les douze points $M_0, M_1, \ldots\ldots\ M_{11}$.

2° a) Démontrer par récurrence que, pour tout n élément de IN, on a : $Z_n = e^{i\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{n\pi}{6}\right)}$.

b) Montrer que les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

c) Montrer que les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés.

3°a) Montrer que $\frac{Z_{n+8} - Z_n}{Z_{n+4} - Z_n} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) En déduire que le triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$ est équilatéral.

4°) Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $M_0, M_1, M_2 \ldots M_{11}$ sont disposés dans une urne.

On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral sachant que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.

5° a) Résoudre l'équation : (E) $x - 12y = 3$ d'inconnue (x , y) élément de $\mathbb{Z}^2$.

b) Déterminer les solutions (x ; y) de (E) telles que pgcd (x ; y) = 3.

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [O x).

PROBLEME.(11 points).

PARTIE A : Soit ABCD un carré direct de centre O et f une isométrie qui laisse invariant le carré ABCD.

1° Démontrer que f (O) = O. En déduire les natures possibles de f.

2° Sachant que f (A) = B, f (B) = C et f (C) = D préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3°a) Déterminer toutes les isométries laissant invariant le carré ABCD (Prendre (Δ) et (Δ ') pour médiatrices respectives de [B C] et de [A B]).

b) Etablir le tableau de composition de ces isométries.

PARTIE B : Dans le repère orthonormé direct du plan (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité 2 cm, on donne les points A (1 ; 0), B (- 1 ; 0), C (0 ; - 1) et D (0 ; 1). A tout point M (x ; y) on associe le nombre complexe z = x + i y .

1° a) Démontrer qu'il existe une unique rotation T de centre C qui transforme A en B.

b) Déterminer l'écriture complexe de T et préciser son angle.

2° On pose M_1 = T (M) ; M_2 = T (M_1) et M_3 = T (M_2).

a) Que peut- on dire des droites (M M_1) et (M_2M_3) pour M distinct de C ? Justifie ta réponse.

b) Quel est l'ensemble (C_1) des points M_1 du plan lorsque M décrit le cercle (C) de diamètre [A B].

3° Soit N le point d'affixe z_N = i z - (1 + i). On note T_λ l'application qui , à tout point M d'affixe z associe le point M′ barycentre des points pondérés (M , λ) , (N , - λ) et (A , 1) où λ est un nombre réel non nul.

a) Démontrer que l'écriture complexe de T_λ est : $z' = \lambda (1 - i) z + \lambda (1 + i) + 1$.

b) Démontrer que T_λ est une similitude directe du plan dont on précisera le rapport, l'angle et le centre Ω.

c) Pour quelles valeurs de λ, T_λ est – elle une rotation ?

4° a) T_λ peut-elle être une translation ? une homothétie ? Justifier bien sûr vos réponses.

b) Déterminer l'expression analytique de T_λ .

5° Soit E un point de coordonnées (- e^λ ; e^λ) et E′ l'image de E par T_λ.

a) Déterminer les coordonnées de E′ en fonction de λ .

b) On suppose que λ décrit IR. Montrer que l'ensemble des points E′est la courbe (C ') d'équation

$$y = 2 (x-1) e^{x-1} + (x - 1).$$

PARTIE C : Soit g la fonction définie sur IR par g (x) = 2 x e^x + x . On note (Γ) la courbe de g.

1°a) Calculer les dérivées successives g′ (x) et g″ (x) de g .

b) Etudier le sens de variation de g′ et en déduire le signe de g′ (x) .

c) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

d) Montrer que (Γ) admet une asymptote oblique (Δ_1) d'équation y = x .

e) Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (Γ) au point d'abscisse 0.

2°a) Construire la courbe (Γ) de g dans le repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

b) Par quelle transformation affine simple la courbe (C ') des points de E′ est – elle image de (Γ).

c) Tracer la courbe (C ') dans le même repère.

d) Calculer en cm^2, l'aire de la partie du plan comprise entre (C ') et les droites d'équations x = 0 et y = 0 .

3° $g^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de g avec n élément de IN \ {0 ; 1}.

a) Démontrer par récurrence que : pour tout n ≥ 2 $g^{(n)}(x) = 2 (x + n) e^x$.

b) Calculer $\sum_{k=2}^{n} g^{(k)}(x)$.

Exercice 1

$AB = 6\text{ cm}$

1° $M \in (C) \Leftrightarrow \dfrac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$\Leftrightarrow MA^2 = 9MB^2 \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{MA} - 3\vec{MB})\cdot(\vec{MA} + 3\vec{MB}) = 0$

$\Leftrightarrow -2\,\vec{MG_1}\cdot 4\,\vec{MG_2} = 0$ où $G_1 = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

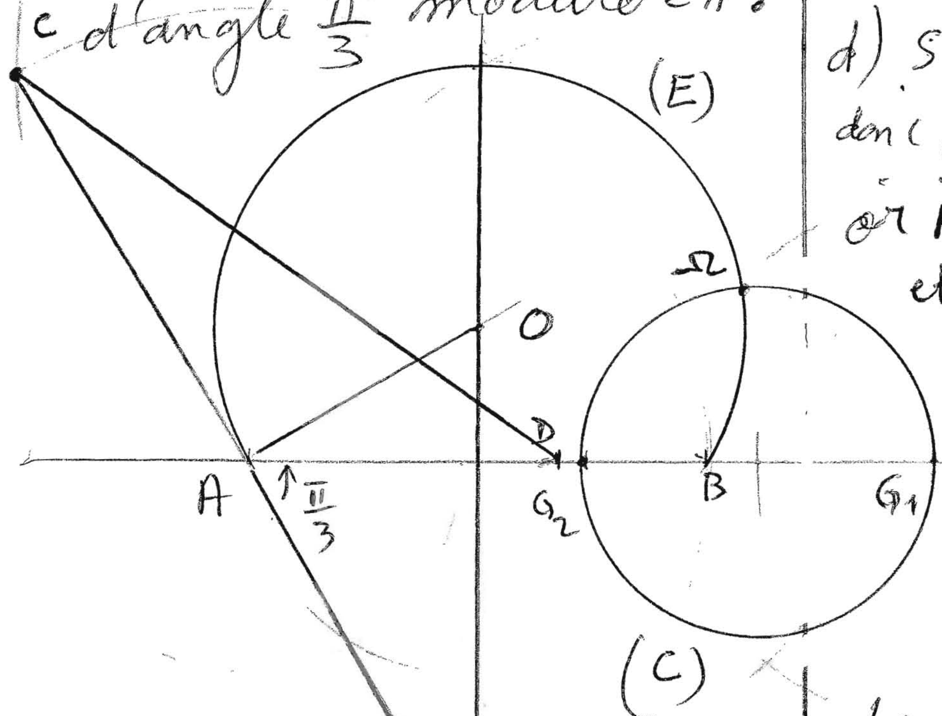
$\Leftrightarrow \vec{MG_1}\cdot\vec{MG_2} = 0$ $\quad G_2 = \text{bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d'où (C) est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ avec $\vec{AG_1} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AG_2} = \frac{3}{4}\vec{AB}$.

2° $M \in (E) \Leftrightarrow (\vec{MA}, \vec{MB}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

(E) est l'arc capable du segment $[AB]$ d'angle $\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Rq (E) est aussi l'arc $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B. ou encore (E) est l'arc capable de corde $[AB]$ d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.



3° a) $R(B) = C$ $\quad AC = AB$, $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{2\pi}{3}$

b) $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

S	
A	B
C	D
Ω	Ω

4°

a) Le rapport de S est

$k = \dfrac{BD}{AC} = \dfrac{\frac{1}{3}AB}{AB} = \dfrac{1}{3}$

Son angle est

$\theta = (\vec{AC}, \vec{BD}) = (\vec{AC}, \vec{AB}) + (\vec{AD}, \vec{BD})$

$= -(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{DA}, \vec{DB}) = -\frac{2\pi}{3} + \pi$

donc $\theta = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Le rapport de S est $\frac{1}{3}$ et son angle $\frac{\pi}{3}$.

b) si Ω est le centre de S on a :

$\begin{cases} \Omega B = \frac{1}{3}\Omega A \\ (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ car $S(A) = B$

c) d'après b) on a $\begin{cases} \Omega A = 3\Omega B \\ (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

donc $\Omega \in (E) \cap (C)$ ainsi Ω est le point commun à (E) et (C). (Voir figure).

d) $S(A) = B$, $S(C) = D$ et $S(\Omega) = \Omega$

donc $(\vec{\Omega C}, \vec{\Omega B}) = (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

or $R(B) = C$ avec $R = r(A, \frac{2\pi}{3})$ et $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ donc

$(\vec{AC}, \vec{AD}) = -(\vec{AD}, \vec{AC}) = -(\vec{AB}, \vec{AC})$

$(\vec{AC}, \vec{AD}) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

$-\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \pi$ donc

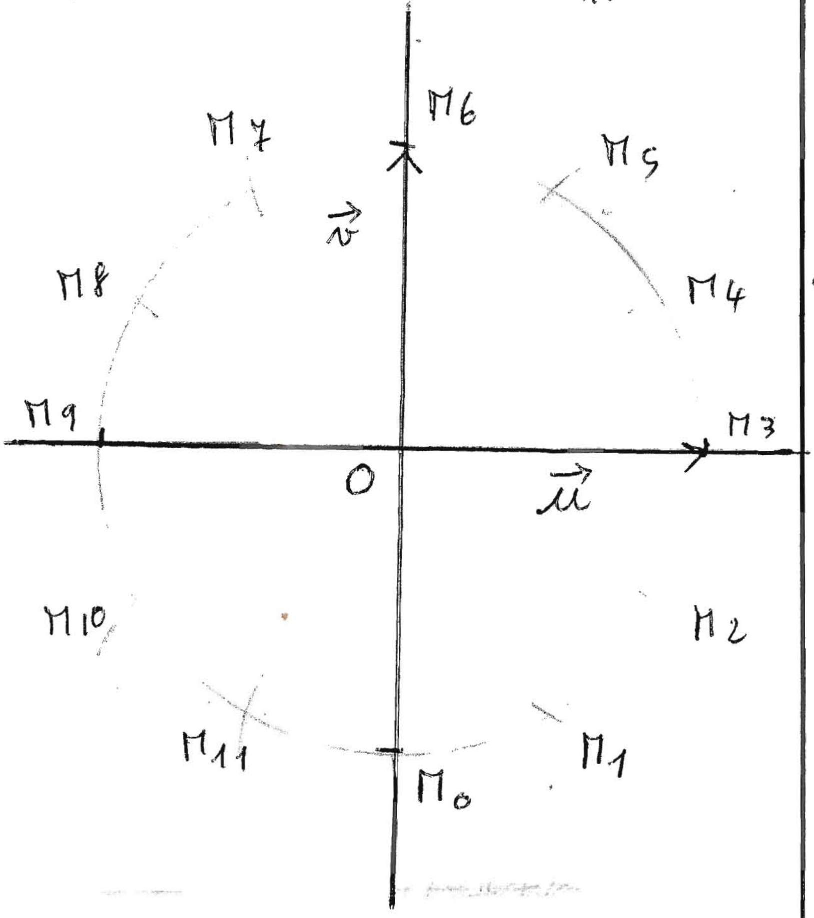
$(\vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{\Omega C}, \vec{\Omega D}) - \pi\ [2\pi]$

$(\vec{AC}, \vec{AD}) = (\vec{\Omega C}, \vec{\Omega B}) + \pi\ [2\pi]$

Les points Ω, A, C et D n'étant pas alignés sont cocycliques.

EXERCICE 2

1° $Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ et $Z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}} Z_n$



$M_n \in \mathcal{C}(O;1)$ et $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \frac{\pi}{6}$

2°a) notons (P_n) la proposition

$Z_n = e^{i(-\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6})}$, $n \in \mathbb{N}$

• Pour $n = 0$ on a $Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$Z_0 = e^{i(-\frac{\pi}{2}+0\frac{\pi}{6})}$ et P_0 vraie

• Soit n un entier naturel non nul. Supposons $Z_n = e^{i(-\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6})}$

on a: $Z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}} Z_n$

$= e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i(-\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6})}$

$= e^{i(-\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{\pi}{6})}$

et P_{n+1} vraie d'où

$\boxed{Z_n = e^{i(-\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6})} \quad \forall n}$

Rq Recurrence par etalage.

au rang 0 $\quad Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

au rang 1 $\quad Z_1 = e^{+i\frac{\pi}{6}} Z_0$

au rang 2 $\quad Z_2 = e^{+i\frac{\pi}{6}} Z_1$

$\vdots$

au rang n $\quad Z_n = e^{i\frac{\pi}{6}} Z_{n-1}$

par produit membre à membre et après simplification on a:

$Z_n = (e^{i\frac{\pi}{6}})^n e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{n\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}}$

et $\boxed{Z_n = e^{i(-\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6})} \quad \forall n}$

b) Montrons que $M_n = M_{n+12}$

$Z_{n+12} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+(n+12)\frac{\pi}{6})}$

$Z_{n+12} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6}+2\pi)}$

$Z_{n+12} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6})} = Z_n$

d'où $M_n = M_{n+12}$

c) Montrons que M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés.

$Z_{n+6} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+(n+6)\frac{\pi}{6})}$

$= e^{i(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6}+\pi)}$

$= e^{i\pi} e^{i(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6})}$

$= -e^{i(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6})}$

$Z_{n+6} = -Z_n \Leftrightarrow Z_{n+6} + Z_n = 0$

O est alors milieu de $[M_n M_{n+6}]$ et M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés

3) 3°a) $\dfrac{Z_{n+8}-Z_n}{Z_{n+4}-Z_n} =$

$$= \frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+(n+8)\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+(n+4)\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6}\right)}}$$

$$= \frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6}\right)}\left[e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}-1\right]}{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6}\right)}\left[e^{i\frac{2\pi}{3}}-1\right]}$$

$$= \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}-1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}-1} = \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}+1\right)\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}-1\right)}{e^{i\frac{2\pi}{3}}-1}$$

$$= e^{i\frac{2\pi}{3}}+1 = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}\,2\cos\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc}$$

$$\frac{Z_{n+8}-Z_n}{Z_{n+4}-Z_n} = e^{i\frac{2\pi}{3}}+1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

b) on a $\begin{cases} M_nM_{n+4} = M_nM_{n+8} \\ \left(\overrightarrow{M_nM_{n+4}}, \overrightarrow{M_nM_{n+8}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

d'où le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

4° En tenant compte du fait que tous les triangles équilatéraux sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ on a 4 triangles equilateraux qui sont : $M_0M_4M_8$; $M_1M_5M_9$; $M_2M_6M_{10}$ et $M_3M_7M_{11}$.

si on note T cet événement on a $\text{Card}\,T = 4$ a le nombre de cas possibles est $\text{Card}\,\Omega = C_{12}^{3} = 220$

Donc

$$\boxed{P(T) = \frac{\text{Card}\,T}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}}$$

5°a) Resolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'equation (E) $x-12y=3$

$15-12(1)=3$ et le couple $(15;1)$ est une solution particulière de (E)

on a alors

$x-12y = 15-12(1) \iff$

$(x-15) = 12(y-1) \iff 12$ divise $x-15$ ainsi il existe un entier relatif k tel que $x-15=12k$

et $\boxed{x = 15+12k}$ Avec

$\begin{cases} x-15 = 12(y-1) \\ x-15 = 12k \end{cases}$ on a

$12k = 12(y-1)$ et $k = y-1$

par suite $\boxed{y = 1+k}$ d'où

$$\boxed{S_{(E)} = \{(15+12k\,;\,1+k)\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

b) $pgcd(x,y) = 3 \Rightarrow 3$ divise x et 3 divise $y \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \, [3] \\ y \equiv 0 \, [3] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 15+12k \equiv 0 [3] \\ 1+k \equiv 0 [3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \equiv 0 \, [3] \\ k \equiv -1 \, [3] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad k \equiv 2 \, [3]$ et alors

$k = 2 + 3k'$ par suite

$\begin{cases} x = 15 + 12(2+3k') = 39 + 36k' \\ y = 1 + 2 + 3k' = 3 + 3k' \end{cases}$

$\boxed{S' = \{(39+36k \, ; \, 3+3k), k \in \mathbb{Z}\}}$

c) $M_n \in [Ox) \Leftrightarrow \arg z_n = 2k\pi$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{6} = 2k\pi$

$\Leftrightarrow -3 + n = 12k$

$\Leftrightarrow n - 12k = 3$

(n, k) solution de (E)

en prenant $n = x = 15 + 12k$

et $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$\boxed{n = 15 + 12k \, , \, k \in \mathbb{N}}$

$M_n \in [Ox) \Leftrightarrow n = 15 + 12k$

où $k \in \mathbb{N}$.

PROBLEME (5)

Partie A

f isométrie fixant le carré $ABCD$ de centre O

1° Toute isométrie conserve le barycentre et donc f conserve l'isobarycentre O des sommets $ABCD$ du carré, ainsi

$f(O) = O$.

f étant une isométrie fixant au moins un point les natures possibles de f sont :

$Id_{\mathcal{P}}$, rotation de centre O ou symétrie orthogonale d'axe passant par O.

2° Avec $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = D$ on a $f(D) = A$ et f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{f = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$$

3° avec $f = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ et $f^{-1} = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$

les isométries fixant $ABCD$ sont :

Id, f, f^{-1}, S_O, S_Δ, $S_{\Delta'}$, $S_{(AC)}$ et $S_{(BD)}$.

$\circ$	Id	f	f^{-1}	S_O	S_Δ	$S_{\Delta'}$	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$
Id	Id	f	f^{-1}	S_O	S_Δ	$S_{\Delta'}$	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$
f	f	S_O	Id	f^{-1}	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$	S_Δ	$S_{\Delta'}$
f^{-1}	f^{-1}	Id	S_O	f	$S_{(AC)}$	$S_{(BD)}$	$S_{\Delta'}$	S_Δ
S_O	S_O	f^{-1}	f	Id	$S_{\Delta'}$	S_Δ	S_{BD}	$S_{(AC)}$
S_Δ	S_Δ	$S_{(AC)}$	S_{BD}	$S_{\Delta'}$	Id	S_O	f	f^{-1}
$S_{\Delta'}$	$S_{\Delta'}$	$S_{(BD)}$	$S_{(AC)}$	S_Δ	S_O	Id	f^{-1}	f
$S_{(AC)}$	$S_{(AC)}$	$S_{\Delta'}$	S_Δ	$S_{(BD)}$	f^{-1}	f	Id	S_O
$S_{(BD)}$	$S_{(BD)}$	S_Δ	$S_{\Delta'}$	S_{AC}	f	f^{-1}	S_O	Id

Rq $f = r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$

$f^{-1} = r^{-1} = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$

Partie B

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

1° a) $CA = \sqrt{2}$ $CB = \sqrt{2}$

$CA = CB = \sqrt{2}$ donc il existe une rotation et une seule qui laisse invariant C et qui transforme A en B.

b) avec $z' = az + b$ $|a| = 1$ et $T(C) = C$, $T(A) = B$ en résolvant le système

$$\begin{cases} -i = -ai + b \\ -1 = a + b \end{cases}$$ on a $a = i$, $b = -1 - i$

L'écriture complexe de T est $z' = iz - 1 - i$

T est donc la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2° $M_1 = T(M)$ $M_2 = T(M_1)$ et $M_3 = T(M_2)$.

a) T est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

T	M	M_1	M_2
	M_1	M_2	M_3

$(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) = \frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3})$

on a alors

$(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_2M_3}) = (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) + (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3})$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_2M_3}) = \pi$ et $(MM_1) // (M_2M_3)$

Les droites (MM_1) et (M_2M_3) sont parallèles.

b) posons $T(B) = B'\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ car $z'_B = -1-2i = z_{B'}$. L'image d'un cercle par une rotation est un cercle. Avec $T(A) = B$ et $T(B) = B'$ si M décrit le cercle (C) de diamètre $[AB]$ $M_1 = T(M)$ décrit le cercle (C_1) de diamètre $[BB']$ car

$M \in (C) \Leftrightarrow T(M) \in T(C)$

$\Leftrightarrow M_1 \in (C_1)$

3° N est le point d'affixe $z_N = iz - (1+i)$ $T_d : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $M \mapsto M'$

tq $M' = \text{bar}\begin{pmatrix} M & N & A \\ d & -d & 1 \end{pmatrix}$

a) Démontrons que

$z' = d(1-i)z + d(1+i) + 1$

on a : $z' = \dfrac{dz - dz_N + 1z_A}{d - d + 1}$

$z' = dz - d(iz - 1 - i) + 1$

$z' = d(1-i)z + d(1+i) + 1$

d'où l'écriture complexe de T_d est $\boxed{z' = d(1-i)z + d(1+i) + 1}$

b) L'écriture complexe de T_d est de la forme $z' = az + b$ avec $a = d(1-i) \neq 0$ car $d \neq 0$ donc T_d est une similitude directe du plan. Avec

$a = d\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $w = \dfrac{b}{1-a}$

$w = \dfrac{1 - 2d^2 i}{1 - 2d + 2d^2}$ on a :

- pour $d > 0$ T_d est une similitude directe du plan de rapport $d\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $w = \dfrac{1 - 2d^2 i}{1 - 2d + 2d^2}$

- pour $d < 0$ $a = -d\sqrt{2}\, e^{i(\pi - \frac{\pi}{4})}$ et T_d est une similitude directe du plan de rapport $-d\sqrt{2}$, d'angle $3\frac{\pi}{4}$ et de centre $\Omega(w)$.

) T_d est une rotation ssi

$|d(1-i)| = 1 \Leftrightarrow |d\sqrt{2}| = 1 \Leftrightarrow$

$d = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $d = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

T_d est une rotation ssi

$\boxed{d = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } d = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

4° a) étant donné que d est réel et non nul $d(1-i)$ ne peut-être réel car $d(1-i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow d=0$

donc T_d ne peut-être ni une translation, ni une homothétie.

b) avec $z' = x'+iy'$, $z = x+iy$ et $T(M) = M'$ on trouve pour expression analytique

de T_d $\boxed{\begin{cases} x' = d(x+y)+d+1 \\ y' = d(-x+y)+d \end{cases}}$

5° $E(-e^d; e^d)$ et $E' = T_d(E)$

a) on a $\begin{cases} x_{E'} = d+1 \\ y_{E'} = 2de^d + d \end{cases}$

et $E'\begin{pmatrix} d+1 \\ 2de^d+d \end{pmatrix}$

b) on a $\begin{cases} d = x_{E'} - 1 \\ y_{E'} = 2(x_{E'}-1)e^{x_{E'}-1} + x_{E'}-1 \end{cases}$

$\begin{cases} d = x-1 \\ y = 2(x-1)e^{x-1} + x-1 \end{cases}$

ainsi lorsque d décrit $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ l'ensemble des points E' est la Courbe (C') d'équation

$y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$

Partie C

$g(x) = 2xe^x + x \quad x \in \mathbb{R}$

1° a) g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = 2(1+x)e^x + 1$

$g''(x) = 2(x+2)e^x$

b) $e^x > 0$ et $g''(x)$ est de signe de $x+2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

g' est décroissante sur $]-\infty; -2]$ g' est croissante sur $[-2; +\infty[$ $g'(-2) = 1 - \frac{2}{e^2} > 0$ est alors le minimum de g' sur $\mathbb{R}$ atteint en -2, ainsi $g' > 0$ sur $\mathbb{R}$.

c) $g' > 0$ sur IR donc g est croissante sur IR.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{-\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} xe^x = +\infty$

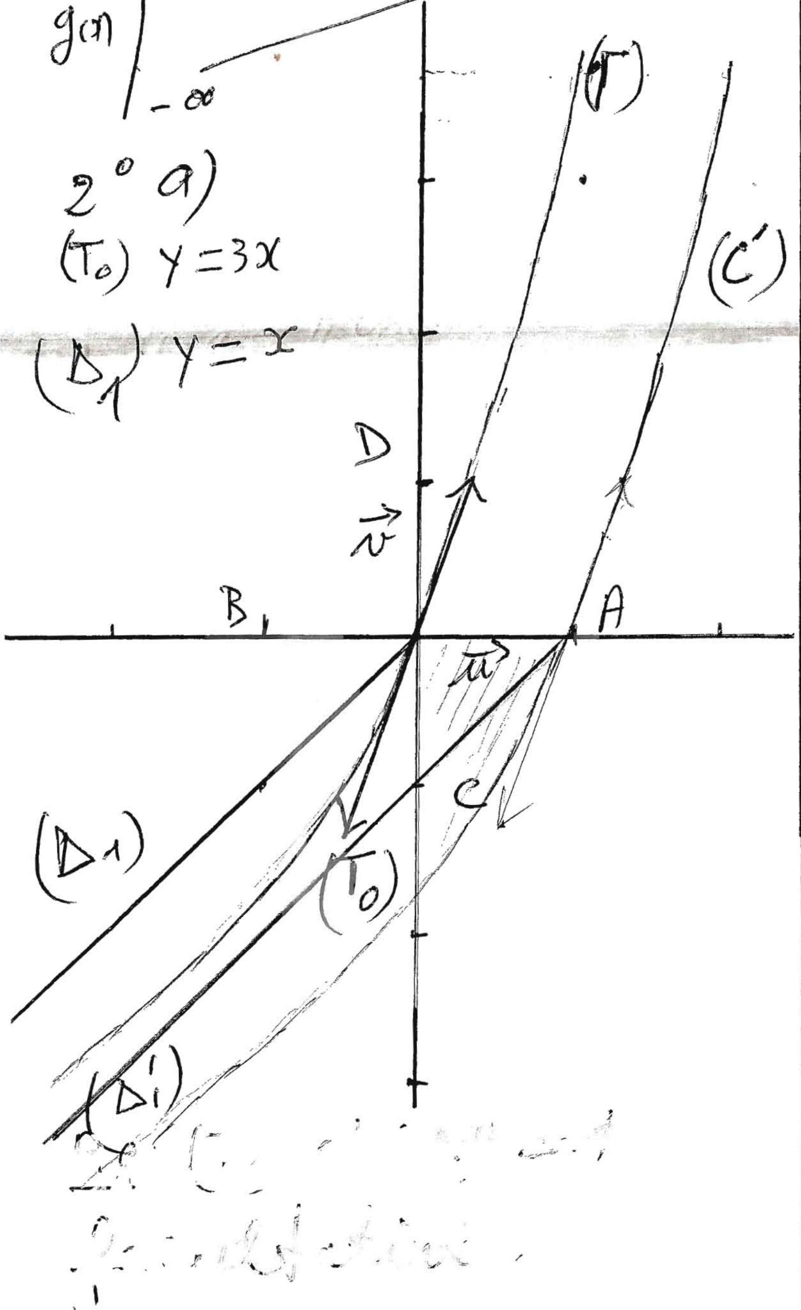
Tableau de variation de g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2° a)

(T_0) $y = 3x$

(Δ_1) $y = x$



b) $y = 2(x-1)e^{x-1} + (x-1) = g_1(x)$

$y = g(x-1)$ donc (C') est l'image de (Γ) par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{1}{0}$.

c) Voir (C') sur la figure.

d) g_1 continue et négative sur $[0;1]$ avec $g_1(x) = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$

on a :

$\mathcal{A} = \left(-\int_0^1 g_1(x)\,dx\right)$ u.a

$= \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{e}\right)$ u.a avec

on a u.a $= 4\,cm^2$

$\mathcal{A} = 4\left(\frac{5}{2} - \frac{4}{e}\right) cm^2$

$\mathcal{A} = \left(10 - \frac{16}{e}\right) cm^2$

3° a) Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$ $g^{(n)}(x) = 2(x+n)e^x$

• pour $n = 2$ $g''(x) = 2(x+2)e^x$ et $g^{(2)}(x) = 2(x+2)e^x$ et P_2 vrai

• Soit n un entier naturel supérieur à 2. supposons $g^{(n)}(x) = 2(x+n)e^x$ et Montrons que $g^{(n+1)}(x) = 2(x+n+1)e^x$.

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x)$$
$$= 2\left(e^x + (x+n)e^x\right)$$
$$= 2e^x(1+x+n)$$

$g^{(n+1)}(x) = 2(x+n+1)e^x$ et

P_{n+1} vraie

D'après le principe de recurrence

$$\forall n \geq 2 \quad g^{(n)}(x) = 2(x+n)e^x$$

b) $$\sum_{k=2}^{n} g^{(k)}(x) = \sum_{k=2}^{n} 2(x+k)e^x$$

$$= 2e^x \sum_{k=2}^{n} (x+k)$$

$$= 2e^x\left(\sum_{k=2}^{n} x + \sum_{k=2}^{n} k\right)$$

$$= 2e^x\left((n-2+1)x + \frac{n-2+1}{2}(2+n)\right)$$

$$= 2e^x\left(x(n-1) + \frac{n+1}{2}(n+2)\right)$$

$$= e^x\left(2x(n-1) + (n+1)(n+2)\right)$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} g^{(k)}(x) = \left(2(n-1)x + n^2 + 3n + 2\right)}$$