MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE
DE L'OGOOUE MARITIME
CRW / DELTA / LJAA / LTB
DE PORT - GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
****
Union – Travail – Justice

BAC BLANC COMMUNAL
Avril 2008

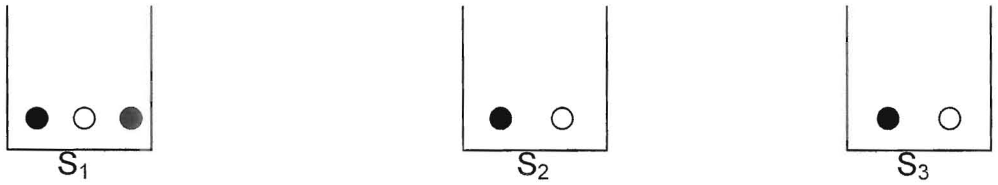
Epreuve de MATHEMATIQUES
Série : C
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

EXERCICE 1 (4 points)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On imagine n sacs de jetons $S_1, \ldots, S_n$.
Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard 1 jeton de S_1.
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2.
- Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire au hasard, un jeton de S_3

. . . . et ainsi de suite . . . .



Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note E_k l'événement : « le jeton sorti de S_k est blanc » et $\overline{E_k}$ l'événement contraire.

1. a) Déterminer la probabilité de E_1, notée $P(E_1)$ et les probabilités conditionnelles :

   $P(E_2 / E_1)$ et $P(E_2 / \overline{E_1})$.

   En déduire la probabilité de E_2, notée $P(E_2)$.

   b) Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée P_k.

   Justifier la relation de récurrence suivante : $P_{k+1} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$.

2. Etude d'une suite (U_k) :

   On note (U_k) la suite définie par : $U_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout $k \geq 1$ $U_{k+1} = \frac{1}{3}U_k + \frac{1}{3}$.

   a) On considère la suite (V_k) définie par, pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $V_k = U_k - \frac{1}{2}$.

   Démontrer que (V_k) est une suite géométrique.

   b) En déduire l'expression de U_k en fonction de k. Montrer que la suite (U_k) est convergente et préciser sa limite.

3. Dans cette question, on suppose que n = 10.
   Déterminer pour quelles valeurs de k on a : $0{,}4999 \leq P_k \leq 0{,}5$.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Soit l'équation (E) : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $8x + 9y = -10$.
   a) Montrer que si (x, y) est une solution de (E) alors 2 divise y.
   b) Résoudre l'équation (E).
2. Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal d'unité 1cm de l'espace.
   a) Placer les points $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A, B et C.
   c) Calculer le volume du tétraèdre OABC et en déduire la distance du point O au plan P.
3. Soit P' le plan d'équation $3x - y + 5z = 0$.
   a) Montrer que P et P' se coupent suivant une droite (Δ) dont on donnera une représentation paramétrique.
   b) Montrer que les coordonnées des points de (Δ) vérifient l'équation (E).
   c) En déduire l'ensemble (F) des points de (Δ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

PROBLEME (11 points)

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = e^{-x} \sin x$.
On note (*C*) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est de 2 cm sur Ox et de 10 cm sur Oy.

***Partie A** : Dans cette partie on cherche à représenter f.*

1. a) Calculer f' et vérifier que : $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

   b) Résoudre sur l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

   En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

c) Dresser sur l'intervalle $[0;2\pi]$, le tableau de variation de f.
   Préciser les tangentes à (*C*) aux deux extrémités de l'intervalle.

2. On note (C_1) et (C_2) les représentations graphiques, dans le repère choisi, des deux fonctions : $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -e^{-x}$.

a) Donner les abscisses sur l'intervalle $[0;2\pi]$ des points où (*C*) rencontre (C_1) et (C_2)

b) Vérifier qu'en chacun des points communs précédents, les courbes (*C*) et (C_1) d'une part, (*C*) et (C_2) d'autre part, ont même tangente.

c) Représenter sur l'intervalle $[0;2\pi]$ les courbes (*C*), (C_1) et (C_2).

3. On note ϕ l'application qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ définies par : $\begin{cases} x' = x + 2\pi \\ y' = e^{-2\pi} y \end{cases}$

   Soit (*C'*) l'image de (*C*) par ϕ. Montrer que (*C'*) = (*C*).

<u>Partie B</u> : *Dans cette partie on étudie une primitive de f.*

1. a) Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+2y=0$ (1). En déduire la solution de (1) qui prend en zéro la valeur zéro et dont la dérivée prend en zéro la valeur un.

   b) En observant que si g est une solution de (1) on a : $g=-\frac{1}{2}(2g'+g'')$, donner une primitive de g en fonction de g et g'.

   En déduire une primitive de f puis l'intégrale : $F(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$.

2. On pose $B_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$ où k est un entier positif ou nul.

   Soit $S_n=B_0+B_1+...+B_n$. Exprimer S_n à l'aide de la fonction F.

   En déduire que la suite (S_n) admet une limite que l'on précisera.

3. a) Donner, sans calculer l'intégrale, le signe de B_k suivant la parité de l'entier k.

   b) Calculer B_0 puis B_k pour tout entier k positif. Vérifier que $B_k=(-1)^k e^{-k\pi}B_0$.

   c) Calculer $T_n=|B_0|+|B_1|+...+|B_n|$. Montrer que T_n admet une limite lorsque n tend vers l'infini. Préciser cette limite.

   d) On pose $S=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $T=\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$. Vérifier que l'on a la relation : $\frac{1}{S}+\frac{1}{T}=\frac{2}{B_0}$.

<u>Partie C</u> : *Etude de la limite d'une suite.*

Soit la suite (u_n) de nombres réels définie par $u_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+...+\sqrt[n]{2^n}\right)$, $n\in IN^*$.

On pose $I=\int_0^1 2^t\,dt$ et $h(t)=2^t$. On partage le segment [0 ;1] en n segments de même longueur $\frac{1}{n}$ par les points $x_0=0$; $x_1=\frac{1}{n}$; ...; $x_i=\frac{i}{n}$;...; $x_n=1$

a) Calculer I.

b) Démontrer que : $\forall\ i\in\{1;2;...;n\}$, $\frac{1}{n}h(x_{i-1})\le\int_{x_{i-1}}^{x_i} h(t)dt\le\frac{1}{n}h(x_i)$.

c) En déduire un encadrement de I et la limite de (u_n) en $+\infty$.

Corrigé Maths Serie C

Exercice 1

1°a- $P(E_1)=\frac{1}{3}$ $\quad P(E_2/E_1)=\frac{2}{3}$

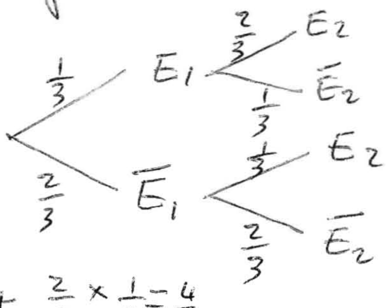
$P(\bar{E}_1)=\frac{2}{3}$ $\quad P(E_2/\bar{E}_1)=\frac{1}{3}$

avec $E_2=(E_1\cap E_2)\cup(\bar{E}_1\cap E_2)$ et la formule des probabilités totales puis la formule des probabilités composées on a :

$$\begin{aligned}P(E_2)&=P(E_1\cap E_2)+P(\bar{E}_1\cap E_2)\\&=P(E_1)\times P(E_2/E_1)+P(\bar{E}_1)P(E_2/\bar{E}_1)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

donc $\boxed{P(E_2)=\frac{4}{9}}$

Rq L'élève peut faire l'arbre de Probabilité suivant



$P(E_2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

b) $1\leq k\leq n$ $\quad P(E_k)=P_k$.

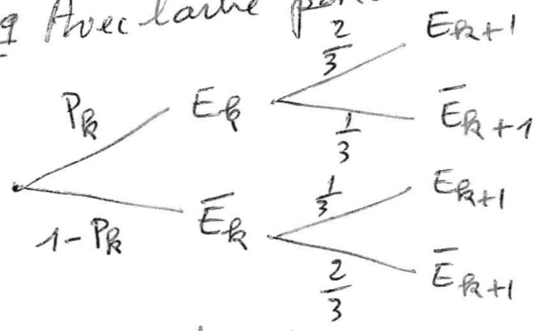
$E_{k+1}=(E_k\cap E_{k+1})\cup(\bar{E}_k\cap E_{k+1})$

avec les mêmes formules on a :

$$\begin{aligned}P_{k+1}&=P(E_{k+1})\\&=P(E_k\cap E_{k+1})+P(\bar{E}_k\cap E_{k+1})\\&=P(E_k)P(E_{k+1}/E_k)+P(\bar{E}_k)P(E_{k+1}/\bar{E}_k)\\&=\frac{2}{3}P(E_k)+\frac{1}{3}(1-P(E_k))\\&=\frac{2}{3}P_k+\frac{1}{3}(1-P_k)\\&=\frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

d'où la relation de recurrence $\boxed{P_{k+1}=\frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}}$

Rq Avec l'arbre pondéré



on obtient

$P_{k+1}=\frac{2}{3}P_k+\frac{1}{3}(1-P_k)=\frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}$

et $P_{k+1}=\frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}$ avec $1\leq k\leq n$

2° $\begin{cases}u_1=\frac{1}{3}\\u_{k+1}=\frac{1}{3}u_k+\frac{1}{3}\end{cases}$ $\quad k\geq 1$

et $v_k=u_k-\frac{1}{2}$, $k\geq 1$

a) $v_{k+1}=u_{k+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}u_k+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}u_k-\frac{1}{6}$

$v_{k+1}=\frac{1}{3}(u_k-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}v_k$ donc la suite (v_k) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=\frac{-1}{6}$

b) on a : $v_k=v_1\,q^{k-1}=\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ ou encore

$v_k=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ et $\boxed{v_k=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k}$

avec $v_k=u_k-\frac{1}{2}$ on a $u_k=v_k+\frac{1}{2}$

et $\boxed{u_k=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)}$

$0<\frac{1}{3}<1$ $\quad \lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=0$ et $\lim\limits_{+\infty}u_k=\frac{1}{2}$

La suite (u_k) converge vers $\frac{1}{2}$.

3° $n=10$ $\quad P_k=u_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

$0{,}4999\leq P_k\leq 0{,}5 \iff$

$0{,}4999\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k\leq 0{,}5 \iff -0{,}0001\leq-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k\leq 0$

$\iff 0\leq\left(\frac{1}{3}\right)^k\leq 2\times10^{-4} \Rightarrow -k\ln 3\leq\ln 2\cdot10^{-4}$

$\Rightarrow k\geq-\frac{\ln 2\cdot10^{-4}}{\ln 3} \Rightarrow k\geq 7{,}75$

avec $1\leq k\leq 10$ on a $\boxed{k\in\{8;9;10\}}$

EXERCICE 2

1° (E) : $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$, $8x+9y=-10$

a) Montrons que si (x,y) est une solution de (E) Alors 2 divise y.

si (x,y) est solution de (E) on a

$8x+9y=-10$ et $9y=2(-5-4x)$

ainsi 2 divise $9y$, or 2 et 9 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss 2 divise y.

b) Resolvons l'equation (E).

$8(1)+9(-2)=-10$ et $(1;-2)$ est une solution de (E).

$8x+9y=-10 \iff 8x+9y=8(1)+9(-2)$

$\iff 8(x-1)=9(-2-y) \iff$

9 divise $8(x-1)$ or 9 et 8 sont premiers entre eux, d'après le Théorème de Gauss 9 divise $x-1$,

ainsi il existe un entier relatif k tel que $x-1=9k$

et alors $\boxed{x=1+9k}$ puis

$8(9k)=$ et $-2-y=8k$.

donc $\boxed{y=-2-8k}$ d'où

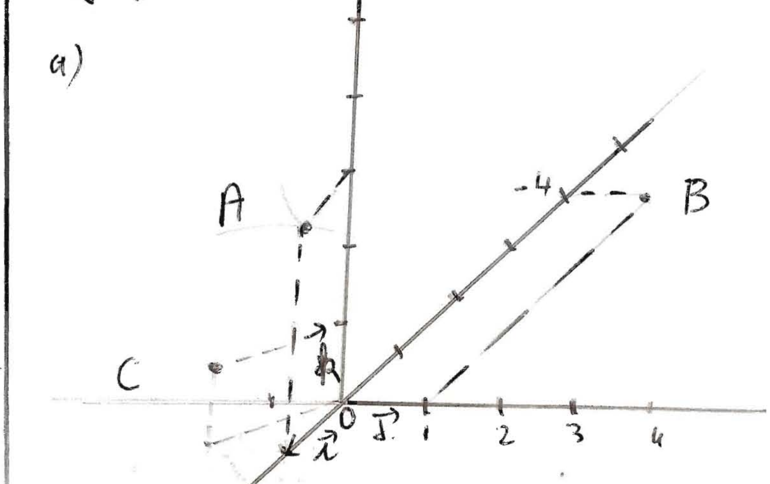
$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(1+9k;-2-8k), k\in\mathbb{Z}\}$

Rq on a aussi

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(1-9k;-2+8k), k\in\mathbb{Z}\}$

2° $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ R.O.N.

a)



b) $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $P=(ABC)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-10\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, de même $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P car $\vec{n}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Une equation de P est de la forme $-x-2y+z+d=0$

avec $A\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\in P$ on a $-1+3+d=0$ et $d=-2$

Une equation cartésienne de P est alors $\boxed{-x-2y+z-2=0}$

ou encore

$\boxed{x+2y-z+2=0}$

c) calculons le volume du tétraèdre OABC.

$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}\right|$

$=\frac{1}{6}|-10|=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$ u.v d'où $\boxed{v = \frac{5}{3}\ cm^3}$ Par ailleurs

$v = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \times h$

donc $d(O, P) = h = \frac{6v}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$ or

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$ et

$d(O, P) = h = \frac{6 \times \frac{5}{3}}{5\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

ainsi la distance du point O au plan P est $\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$.

3° P' $3x - y + 5z = 0$ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$

P $x + 2y - z + 2 = 0$ $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n_2} \wedge \vec{n_1}\begin{pmatrix}9\\-8\\-7\end{pmatrix}$ on a $\vec{n_2} \wedge \vec{n_1} \neq \vec{0}$

Les vecteurs normaux des plans P et P' ne sont pas colinéaires donc P et P' se coupent suivant une droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{n_2} \wedge \vec{n_1}\begin{pmatrix}9\\-8\\-7\end{pmatrix}$

De plus le point D $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ verifie

$$\begin{cases} 3(1) - (-2) + 5(-1) = 5 - 5 = 0 \\ 1 + 2(-2) + 1 + 2 = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

ce qui traduit que le point D est commun aux deux plans P et P' et D appartient à (Δ). Une equation paramet. de (Δ) est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = -2 - 8t \\ z = -1 - 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

Methode 2

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y - 5z + 10 = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$8x + 9y + 10 = 0$$

D'après 1b les solutions de $8x + 9y = -10$ sont de la forme $\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = -2 - 8t \end{cases}$ et

$z = x + 2y + 2 = -1 + 7t$ ainsi une representation parametrique de (Δ) est

$$\begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = -2 - 8t \\ z = -1 + 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

methode 3 on exprime x et y en fonction de z puis on pose $z = t$

$$(\Delta) \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{7} - \frac{9}{7}t \\ y = -\frac{6}{7} + \frac{8}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

b) $8(1 + 9t) + 9(-2 - 8t) = -10$

donc les coordonnées des points de (Δ) verifient (E).

c) L'ensemble (F) des points de (Δ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs est

$$(F) \begin{cases} x = 1 + 9k \\ y = -2 - 8k \\ z = -1 - 7k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Rq Avec la methode 3 et les congruences modulo 7 on retrouve un resultat équivalent.

PROBLEME

Partie A

$f(x) = e^{-x}\sin x \ , \quad x \in \mathbb{R}$

1° a) Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto \sin x$ sont derivables sur $\mathbb{R}$ donc f est derivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$ — 0,25

$= e^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\,e^{-x}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\,e^{-x}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc 0,25

$f'(x) = \sqrt{2}\,e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Resolvons $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$ avec $x \in [0;2\pi]$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0 \iff x+\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$

$\iff x \in \left]-\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[$. 0,25

en tenant compte de $x \in [0;2\pi]$ on a :

$\left(\left]-\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\right) \cap [0;2\pi] =$

$\boxed{S = \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]}$ 0,25

Rq : $S = (I_0 \cup I_1) \cap [0;2\pi]$.

$k=0$ et $k=1$

Signe de $f'(x)$ sur $[0;2\pi]$

$\forall x \in [0;2\pi]$ $\sqrt{2}\,e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est de signe de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 0,25

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4};2\pi\right]$ $f' > 0$

sur $\left]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right[$ $f' < 0$

c) Tableau de variation de f

0,25

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{4}}$	$\nearrow$	0

• Tangente en $O(0;0)$; $f(0)=0$ $f'(0)=1$

$\boxed{(T_0)\ y = x}$ 0,25

• Tangente en $A(2\pi;0)$. $f'(2\pi) = e^{-2\pi}$ et $f(2\pi)=0$

$\boxed{(T_{2\pi})\quad y = e^{-2\pi}(x-2\pi)}$ 0,25

2) (C_1) $y = e^{-x}$; (C_2) $y = -e^{-x}$

a) • Determinons $(C_1)\cap(C)$ sur $[0;2\pi]$

$\begin{cases} x \in [0;2\pi] \\ e^{-x}\sin x = e^{-x} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [0;2\pi] \\ \sin x = 1 \end{cases}$

0,25

$\iff \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ (C_1) et (C) se rencontrent au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

• Determinons $(C_2)\cap(C)$

$\begin{cases} x \in [0;2\pi] \\ e^{-x}\sin x = -e^{-x} \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [0;2\pi] \\ \sin x = -1 \end{cases} \iff \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}$ 0,25

(C_2) et (C) se rencontrent au point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$.

Rq $(C_1)\cap(C) = \left\{\left(\frac{\pi}{2};\ e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right\}$

$(C_2)\cap(C) = \left\{\left(\frac{3\pi}{2};\ -e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right\}$

b) Il suffit de montrer qu'en chacun de ces points les tangentes ont resp. les mêmes coefficients directeurs .

Soit $g(x) = e^{-x}$ et $h(x) = -e^{-x}$ on a :

$g'(x) = -e^{-x}$ $\qquad h'(x) = e^{-x}$

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ $\qquad h'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$ $\qquad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}}$

0,25

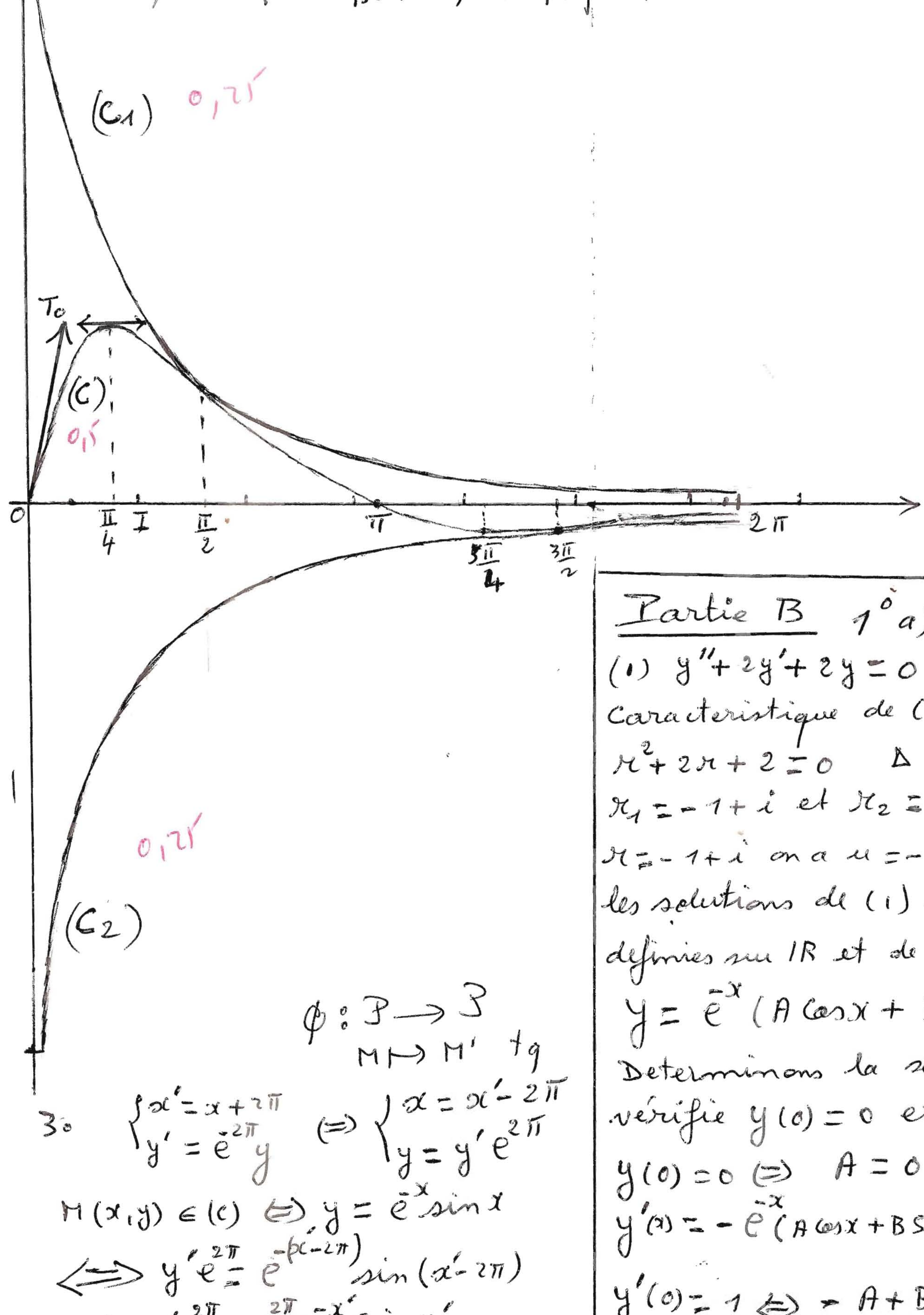
$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc (C) et (C_1) ont même tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ et sont donc tangents en ce point . De même (C_2) et (C) sont tangents au pt $\left(\frac{3\pi}{2};\ -e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$

0,25

5 (

C9

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	0	$0{,}32$	$-0{,}039$	$0{,}2$	$-0{,}08$



$\phi : P \to P$
$M \mapsto M'$ tq

3° $\begin{cases} x' = x + 2\pi \\ y' = e^{-2\pi} y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - 2\pi \\ y = y' e^{2\pi} \end{cases}$

$M(x,y) \in (C) \iff y = e^{-x} \sin x$

$\iff y' e^{2\pi} = e^{-(x'-2\pi)} \sin(x' - 2\pi)$

$\iff y' e^{2\pi} = e^{2\pi} e^{-x'} \sin x'$

$\iff y' = e^{-x'} \sin x'$ 0,5

$\iff M'(x', y') \in (C)$

d'où $\boxed{\phi(C) = (C)}$ et $(C') = C$

Partie B 1° a) Résolvons

(1) $y'' + 2y' + 2y = 0$ L'équation caracteristique de (1) est

$r^2 + 2r + 2 = 0$ $\Delta = -4 = (2i)^2$

$r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$. Avec $r = -1 + i$ on a $u = -1$, $v = 1$ et les solutions de (1) sont les fonct° definies sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$y = e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$ 0,5

Determinons la solution qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

$y(0) = 0 \iff A = 0$

$y'(x) = -e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + e^{-x}(-A \sin x + B \cos x)$

$y'(0) = 1 \iff -A + B = 1 \iff B = 1$

En conclusion $A = 0$ et $B = 1$ et 0,5

La fonction cherchée est $y = e^{-x} \sin x$

or $f(x) = e^{-x} \sin x$, ainsi la fonction cherchée est f avec $f(x) = e^{-x} \sin x$.

b) Si g est une solution de (1) alors $g''+2g'+2g=0$ et on a : $g=-\frac{1}{2}(2g'+g'')$ par suite une primitive de g en fonction de g et g' est $\boxed{G=-\frac{1}{2}(2g+g')}$ ou encore $\boxed{G=-g-\frac{1}{2}g'}$ 0,25

f étant une solution de (1) une primitive de f est $-f-\frac{1}{2}f'$ et 0,25

$$F(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt=-\left[f+\frac{1}{2}f'\right]_0^x$$

$$F(x)=-\left(f(x)+\frac{1}{2}f'(x)-f(0)-\frac{1}{2}f'(0)\right)$$

$$F(x)=-\left(e^{-x}\sin x+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x)=-\left(e^{-x}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)+\frac{1}{2}$$

$$F(x)=-e^{-x}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\right)+\frac{1}{2}$$

$$F(x)=-e^{-x}\left(\sin x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)+\frac{1}{2}$$

0,25

$$\boxed{F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}}$$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Rq Accepter toutes les formes de $F(x)$.

2. $B_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}f(t)\,dt \qquad k\in\mathbb{N}$

$$S_n=B_0+B_1+\dots+B_n$$
$$=\int_0^{\pi}f\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}f\,dt+\dots+\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f\,dt$$
$$=\int_0^{(n+1)\pi}f(t)\,dt$$ d'après la relat° de Chasles 0,5

$\boxed{S_n=F[(n+1)\pi]}$ d'après 1b de B.

avec $F(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}$

$$S_n=-\frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}\left(\sin(n+1)\pi+\cos(n+1)\pi\right)+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}(-1)^{n+1}+\frac{1}{2}$$ car

$\sin(n+1)\pi=0$ et $\cos(n+1)\pi=(-1)^{n+1}$

d'où $S_n=(-1)\times(-1)^{n+1}\times\frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}+\frac{1}{2}$

$$\boxed{S_n=(-1)^n\times\frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}+\frac{1}{2}}\ \forall n\in\mathbb{N}$$ 0,25

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}=0$ or $(-1)^n=1$ ou -1

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\times\frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}=0$ par suite

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}}$$ 0,25

Rq $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-(n+1)\pi}\right|=\lim\frac{1}{2}e^{-(n+1)\pi}=0$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}$

3° a) Signe de B_k suivant la parité de k.

- si $k=2p$ on a $\sin t\geq 0$ si $x\in[2p\pi;(2p+1)\pi]$ et $f(t)=e^{-t}\sin t\geq 0$ et $B_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}f\,dt\geq 0$ 0,25
- si $k=2p+1$ $\sin t\leq 0$ si $x\in[(2p+1)\pi;(2p+2)\pi]$ et $f(t)=e^{-t}\sin t\leq 0$ et $B_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}f\,dt\leq 0$ 0,25

Ainsi si k est pair $B_k\geq 0$ et si k est impair $B_k\leq 0$.

b) $B_0=\int_0^{\pi}f\,dt=F(\pi)=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$ 0,25

Rappelons avec $F(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$; F est la primitive de f qui s'annule en 0.

$$B_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}f(t)\,dt=\left[F\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$B_k=F[(k+1)\pi]-F(k\pi)$$

$$B_k=\left(-\frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{-k\pi}(-1)^k+\frac{1}{2}\right)$$

$$B_k=-\frac{1}{2}e^{-(k+1)\pi}\times(-1)^{k+1}+\frac{1}{2}e^{-k\pi}(-1)^k$$

$$B_k=(-1)^k\frac{1}{2}e^{-k\pi}(e^{-\pi}+1)$$ 0,25

Rq Accepter l'1 des 3 derniers résultats.

exprimons B_k en fonction de B_0

avec $B_0=\frac{1}{2}e^{-\pi}+1$ on a

$$\boxed{B_k=(-1)^k e^{-k\pi}B_0}$$ 0,25

c) $T_n = |B_0| + |B_1| + \dots + |B_n|$

$|B_k| = |(-1)^k e^{-k\pi} B_0| = e^{-k\pi} B_0$ d'où

$T_n = B_0\left(1 + e^{-\pi} + \dots + e^{-n\pi}\right) = B_0\left[\sum_{k=0}^{n} e^{-k\pi}\right]$

or $\sum_{k=0}^{n} (e^{-\pi})^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-\pi} \neq 1$

ainsi $\sum_{k=0}^{n} e^{-k\pi} = \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$ d'où

$T_n = B_0 \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1) \times \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \left(1 - e^{-(n+1)\pi}\right)}$$ 0,5

Cherchons la limite de T_n

$\lim_{n \to +\infty} e^{-(n+1)\pi} = 0$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}}$ 0,25

d) avec $S = \lim S_n$ et $T = \lim T_n$

Vérifions que $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{2}$ et $T = \lim T_n = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}$

$\frac{1}{S} = 2$ et $\frac{1}{T} = \frac{2(1 - e^{-\pi})}{1 + e^{-\pi}}$

$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = 2 + \frac{2(1 - e^{-\pi})}{1 + e^{-\pi}} = \frac{2(1 + e^{-\pi}) + 2(1 - e^{-\pi})}{1 + e^{-\pi}}$

$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{4}{1 + e^{-\pi}} = \frac{4}{2B_0} = \frac{2}{B_0}$ car $B_0 = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$

donc $\boxed{\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}}$ 0,25

Partie C

1) a) $I = \int_0^1 2^t \, dt = \int_0^1 e^{t \ln 2} \, dt = \frac{1}{\ln 2}\left[2^t\right]_0^1$

0,5 $I = \frac{1}{\ln 2}(2 - 1) = \frac{1}{\ln 2}$ et $\boxed{I = \frac{1}{\ln 2}}$

b) Soit $h(t) = 2^t$ $a = 2 > 1$ donc

0,25 h étant une fonction exponentielle de base a avec $a > 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $[x_{i-1}; x_i] \subset [0; 1]$ avec $x_i = \frac{i}{n}$ $\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$. En tenant de $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ on a avec h strict. croiss.

$\forall t \in [x_{i-1}; x_i]$ on a $x_{i-1} \leq t \leq x_i$ donne $h(x_{i-1}) \leq h(t) \leq h(x_i)$ et en utilisant l'inégalité de la moyenne ou une intégration membre à membre on a :

$\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$ $\frac{1}{n} h(x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} h \, dt \leq \frac{1}{n} h(x_i)$. 0,75

c) par addition et avec la relation de Chasles

on a : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq I \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{i}{n}\right)$

ou encore $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) \leq I \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{i}{n}\right)$

or $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{1}{n} h(0) - \frac{1}{n} h(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right)$

et $h\left(\frac{i}{n}\right) = 2^{\frac{i}{n}} = (2^i)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2^i}$

avec $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{2^i}$ et $\frac{1}{n}(h(0) - h(1)) = \frac{1}{n}(2^0 - 2^1) = -\frac{1}{n}$

on a : $\boxed{u_n - \frac{1}{n} \leq I \leq u_n}$ $\forall n$ 0,25

or $u_n - \frac{1}{n} \leq I \Rightarrow u_n \leq \frac{1}{n} + I$

Ainsi $\boxed{I \leq u_n \leq \frac{1}{n} + I}$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$ 0,25

d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = I = \frac{1}{\ln 2}$ par encadrement. 0,25