MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE | REPUBLIQUE GABONAISE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SCOLAIRE ET NORMAL

DIRECTION D'ACADEMIE PROVINCIALE DE L'OGOOUE-MARITIME | Union-Travail-Justice

LYCEE JOSEPH AMBOUROUE-AVARO

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

BACCALAUREAT BLANC

Session de : Février 2013

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série : C & E **Durée** : 4h **Coef** : 5

EXERCICE1 (5pts)

Dans cet exercice les questions 1°), 2°) et 3°) sont indépendantes.

1°) a) Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ de nombres entiers relatifs, solution de l'équation ;

(E) : $8x - 5y = 3$.

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p; q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

Montrer que le couple $(p; q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9[40]$.

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2°) Démontrer que pour tout $n \in IN$, $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

3°) Soit p un nombre premier. On suppose que pour tous entiers relatifs a et b, on a $(a + b)^p \equiv a^p + b^p [p]$.

a) Démontrer que : $\forall k \in IN$, $k^p \equiv k[p]$.

b) En déduire que pour tout entier naturel k premier avec p, on a : $k^{p-1} \equiv 1[p]$.

EXERCICE2 (4pts)

On considère la suite $(I_n)_{n \in IN}$ définie par la relation $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$ et $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,dt$, $\forall n \in IN$.

1°) Calculer I_0 et I_1.

2°) a) Comparer t^n et t^{n+1}, lorsque $0 \le t \le 1$ et $n > 0$.

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3°) a) Etablir, que : $\forall n \in IN^*, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

b) Démontrer que pour tout t élément de $[0;1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$.

c) En déduire que : $\forall n \in IN^*, \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

d) Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème (11pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est $4cm$. Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie A

On appelle f_0 et f_1 les fonctions définies sur I par : $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.

$\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont les courbes représentatives de f_0 et de f_1 dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°) **Etude de la fonction f_1.**

a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b) Etudier le signe de f_1' sur I et dresser le tableau de variation de f_1.

2°) Vérifier que pour tout $x \in I$, $f_1'(x) = f_0(x) - f_1(x)$ (1).

3°) Soit $x \in I$. On appelle M_0 et M_1 les points de $\mathcal{C}_0$ et de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x.

Déterminer selon les valeurs de x les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.

4°) **Les graphiques**

a) Comment peut-on construire $\mathcal{C}_0$, à partir de la courbe d'équation $y = e^x$? Tracer $\mathcal{C}_0$.

b) Placer les points de $\mathcal{C}_1$ d'abscisses $0;1;2$ en précisant les tangentes à $\mathcal{C}_1$ en ces points.

c) Tracer $\mathcal{C}_1$ dans le même repère.

Partie B

On se propose de fabriquer, à la suite de f_0 et de f_1, des fonctions $f_2, f_3, \ldots, f_n$, dérivables sur I, pour tout n entier naturel non nul, (2) $\begin{cases} f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$.

1°) On pose pour tout x de I, $g_n(x) = f_n(x)e^x$, c'est-à-dire : $f_n(x) = g_n(x)e^{-x}$.

a) Calculer $f_n'(x)$ en fonction de $g_n(x)$ et de $g_n'(x)$ pour tout x de I.

b) Montrer que f_n satisfait aux conditions (2) si et seulement si : pour tout $x \in I$, pour tout n entier naturel non nul,

(3) $\begin{cases} g_n'(x) = e^x f_{n-1}(x) \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$.

2°) a) Calculer $g_2'(x)$ puis $g_2(x)$ pour $x \in I$. En déduire $f_2(x)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout x élément de I, pour tout n entier naturel non nul, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.

Partie C

Soit a un élément non nul fixé dans I. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n(a) = \int_0^a f_n(x)dx$ où f_n est la fonction définie dans la partie B.

1°) Calculer $I_0(a)$.

2°) En utilisant les conditions (2), montrer que pour tout $n \geq 1$: $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}$.

3°) En déduire que pour tout $n \geq 0, I_n(a) = 1 - (\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}) e^{-a}$.

4°) Dans cette question, on pose $a = 1$.

On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in IN$ par : $u_n = 1 - (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)dx$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0;1]$: $f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n$.

c) En déduire l'encadrement : pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis la limite de u_n.

d) Déduire enfin que $e = \lim_{n \to +\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$.

Corrigé bac blanc LJAA 2013
Mathématiques Série C et E

EXERCICE 1

1° a) Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(E) $8x - 5y = 3$

Le couple $(1, 1)$ est une solution particulière de (E).

$8x - 5y = 3 \Leftrightarrow 8x - 5y = 8\times1 - 5\times1$

$\Leftrightarrow 8(x-1) = 5(y-1) \Leftrightarrow$

5 divise $8(x-1)$, or 8 et 5 sont premiers entre eux, d'après le Théorème de Gauss 5 divise $x-1$, ainsi il existe un entier relatif k tel que $x - 1 = 5k$ et $\boxed{x = 1+5k}$ avec

$\begin{cases} 8(x-1) = 5(y-1) \\ x - 1 = 5k \end{cases}$ on a

$8 \times 5k = 5(y-1)$ et

$y - 1 = 8k$ et $y = 1 + 8k$

$x = 1 + 5k$ et $y = 1 + 8k$

d'où

$\boxed{S = \{(1+5k\,;\,1+8k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$

b) $m = 8p + 1 = 5q + 4$

$\Leftrightarrow 8p - 5q = 3 \Leftrightarrow$

(p, q) solution de (E)

$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq $p = 1 + 5k$

ainsi

$m = 8p + 1 = 8(1+5k) + 1$

$m = 9 + 40k$

d'où $\boxed{m \equiv 9\,[40]}$

c) $m > 2000$ et $m = 9 + 40k$

$\Rightarrow 9 + 40k > 2000 \Rightarrow k > \frac{1991}{40}$

$\Rightarrow k > 49{,}775 \Rightarrow k \in \{50; 51; \dots\}$

on a $k = 50$ et $m = 2009$

$p = 251$, $q = 401$.

Le plus petit de ces nombres entiers est $\boxed{m = 2009}$

2° Montrons que $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

$4^4 = 256 \equiv 3\,[11]$

$4^2 = 16 \equiv 5\,[11]$

$3^3 = 27 \equiv 5\,[11]$

$4^{4n} \equiv 3^n\,[11]$

$3^n \equiv 3^n\,[11]$

$4^{4n+2} \equiv 5\times 3^{n}\ [11]$
$3^{n+3} \equiv 5\times 3^{n}\ [11]$ } donc

$4^{4n+2} \equiv 3^{n+3}\ [11]$ ainsi

$4^{4n+2} - 3^{n+3} \equiv 0\ [11]$ et pour

n le nombre $4^{4n+2} - 3^{n+3}$

est divisible par 11.

3° on a : $(a+b)^{p} \equiv a^{p} + b^{p}\ [p]$

a) Démontrons que

$k^{p} \equiv k\ [p] \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Procédons par récurrence.

- Pour $k=0$ on a : $0^{p} = 0$ et

$0 \equiv 0\ [p]$ donc la propriété

est vraie pour $k=0$

- Soit k un nombre entier

naturel non nul

supposons $k^{p} \equiv k\ [p]$ et

Montrons que $(k+1)^{p} \equiv (k+1)\ [p]$

d'après la relation

$(a+b)^{p} \equiv a^{p} + b^{p}\ [p]$ on a :

$(k+1)^{p} \equiv k^{p} + 1^{p}\ [p]$

or $1^{p} \equiv 1\ [p]$ et $k^{p} \equiv k\ [p]$

donc $(k+1)^{p} \equiv k+1\ [p]$

La propriété est encore

vérifiée au rang $k+1$

d'après le principe de

récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$

$k^{p} \equiv k\ [p]$.

b) Déduisons en que

si k et p sont premier

entre eux alors

$k^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

$k^{p} \equiv k\ [p] \Rightarrow k^{p} - k \equiv 0\ [p]$

$\Rightarrow k(k^{p-1} - 1) \equiv 0\ [p] \Rightarrow$

$k^{p-1} - 1 \equiv 0\ [p]$ ~~de~~ après le

Théorème de Gauss

puisque $pgcd(k, p) = 1$

donc $k^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Ainsi Pour tout entier

naturel k premier avec

p on a : $k^{p-1} \equiv 1\ [p]$

EXERCICE 2

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$$

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\,dt$$

1° $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt =$

$$= \frac{2}{3}\left[(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1$$

$$\boxed{I_0 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}}$$

$$I_1 = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}\left[t(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1 - \frac{4}{15}\left[(1+t)^2\sqrt{1+t}\right]_0^1$$

$$\boxed{I_1 = \frac{4+4\sqrt{2}}{15}}$$

2 a) $\forall\ t \in [0;1]$ et $n \geq 0$

$t^{n+1} - t^n = t^n(t-1) \leq 0$ car

$t^n \geq 0$ et $t \leq 1$ donc

$$\boxed{t^{n+1} \leq t^n \ \forall t \in [0;1]}$$

b) Mq (I_n) est décroissante

3

$t^{n+1} \leq t^n$ et $\sqrt{1+t} > 0$

donc $t^{n+1}\sqrt{1+t} \leq t^n\sqrt{1+t}$

par intégration sur $[0;1]$

on a : $\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$

donc $I_{n+1} \leq I_n$ ainsi

la suite (I_n) est décroissante

__Rq__ $I_1 \leq I_0$.

3° a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$ et $t^n \geq 0$

$\Rightarrow t^n \leq t^n\sqrt{1+t} \leq t^n\sqrt{2}$

Les fonctions $t \mapsto t^n$, $t \mapsto t^n\sqrt{1+t}$ et $t \mapsto t^n\sqrt{2}$ étant continues sur $[0;1]$, par intégration sur $[0;1]$ on a

$$\int_0^1 t^n\,dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{2}\,dt$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}}$$

b) Démontrons que $\forall t \in [0;1]$

$0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 2 \Rightarrow$

4

$1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2} \Rightarrow$

$\sqrt{2} - \sqrt{1+t} \geq 0$ et $\sqrt{1+t} \geq 1$

donc $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t}$ et il reste à prouver que

$\sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

La fonction φ définie sur $[0;1]$ par $\varphi(t) = \frac{1}{2}(1-t) - \sqrt{2} + \sqrt{1+t}$ est continue et dérivable sur $[0;1]$ et $\varphi'(t) = \frac{1-\sqrt{1+t}}{2\sqrt{1+t}}$

$\varphi'(t) \leq 0$ car $1 \leq \sqrt{1+t}$

φ est dérivable et décroissant sur $[0;1]$ et $\varphi([0;1]) = \left[0; \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right]$

car $\varphi(0) = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ et $\varphi(1) = 0$

$\forall t \in [0;1]$ $\varphi(t) \geq 0$ et

$\sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$

en conclusion

$$\boxed{\forall t \in [0;1] \quad 0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)}$$

c) 4 $0 \leq t^n\sqrt{2} - t^n\sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}t^n - \frac{1}{2}t^{n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(t^{n+1} - t^n) \leq t^n\sqrt{1+t} - t^n\sqrt{2} \leq 0$

1 Par intégration sur $[0;1]$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \leq I_n - \frac{\sqrt{2}}{n+1} \leq 0$

$\frac{-1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{\sqrt{2}}{n+1} \leq I_n$

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(n+1)(n+2) \geq n^2$ car $n+1 \geq n$ et $n+2 \geq n$ donc

$\frac{-1}{(n+1)(n+2)} \geq -\frac{1}{n^2}$ et

$\frac{-1}{2(n+1)(n+2)} \geq -\frac{1}{2n^2}$ Ainsi

$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $\forall n$.

d) $\lim\limits_{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$ $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes

Par ailleurs

$\frac{n\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n} \leq nI_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n+1} = \sqrt{2}$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2n} = 0$

d'où $\boxed{\lim\limits_{+\infty} nI_n = \sqrt{2}}$

Problème

(5)

Partie A

$f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$

1° Etude de f_1.

a) $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} -(-xe^{-x})$

$= \lim_{X\to-\infty} -Xe^{X} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 0}$$

b) f_1 est dérivable sur I

et $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$e^{-x}>0$ et $f_1'(x)$ est de signe de $1-x$.

sur $]0;1[$ $f_1'>0$ et f_1 est croissante sur $[0;1]$.

sur $]1;+\infty[$ $f_1'(x)<0$ et f_1 est décroissante sur $[1;+\infty[$.

Tableau de variation de f_1

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2° $\forall x\in I$

$f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = f_0(x) - f_1(x)$

donc $\boxed{\forall x\in I \quad f_1'(x) = f_0(x) - f_1(x) \quad (1)}$

3° Les positions relatives de (C_0) et (C_1) sont données par le signe de $f_0(x) - f_1(x) = f_1'(x)$ or sur $[0;1[$ $f_1'>0$ et (C_0) est au dessus de (C_1) sur $[0;1[$.

sur $]1;+\infty[$ $f_1'<0$ et (C_0) est au dessous de (C_1). au point d'absisse 1 (C_0) coupe (C_1).

4° a) en posant $f(x) = e^{x}$ et (C) la courbe d'équation $y = e^{x}$ on a $f_0(x) = f(-x)$ et (C_0) est le symetrique de (C) par rapport à l'axe des ordonnées $(O,\vec{J})$.

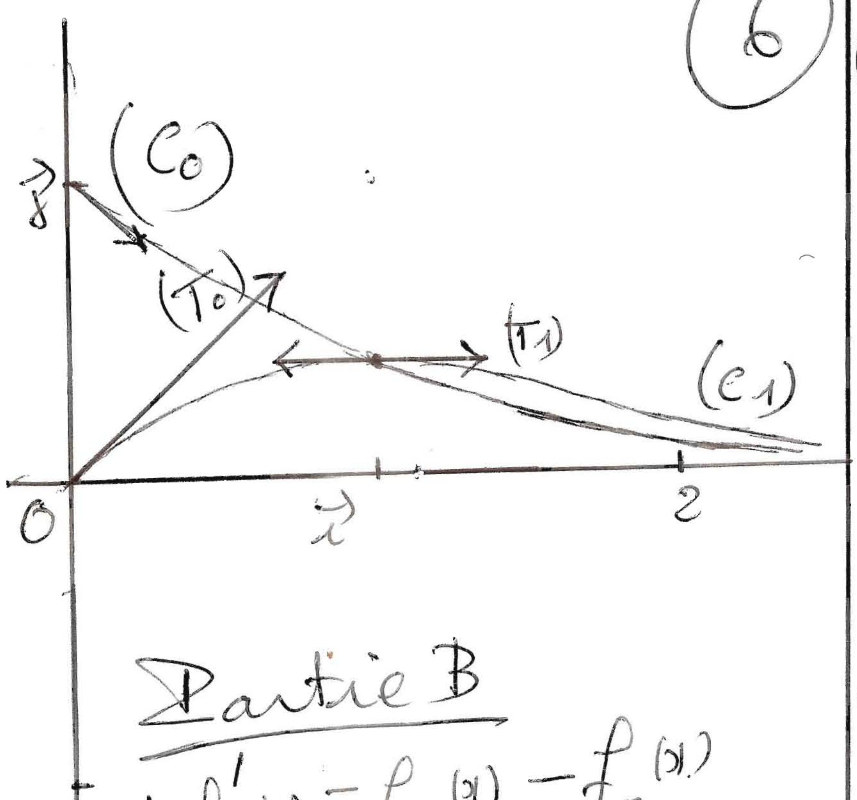
b) $f_1(0) = 0$ et $f_1'(0) = 1$

$f_1(1) = \frac{1}{e}$ et $f_1'(1) = 0$

$f_1(2) = 2e^{-2}$ et $f_1'(2) = -e^{-2}$

connaissant les points et les coefficients directeurs associés, on place les points et on construit les tangentes.

6



Partie B

$\begin{cases} f_n'(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

1° $g_n(x) = f_n(x)\, e^{x}$ et

$f_n(x) = g_n(x)\, e^{-x}$

a) calculons $f_n'(x)$ en fonction de $g_n(x)$ et $g_n'(x)$.

les fonctions f_n et $x \mapsto e^{x}$ sont derivables sur I donc g_n est dérivable sur I et

$f_n'(x) = g_n'(x)\, e^{-x} - e^{-x} g_n(x)$

$\forall x \in I$ $\boxed{f_n'(x) = e^{-x}\left(g_n'(x) - g_n(x)\right)}$

b) Montrons que (2) $\Leftrightarrow$

(3) $\begin{cases} g_n'(x) = e^{x} f_{n-1}(x) \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$

f_n vérifie (2) $\Rightarrow$ $\begin{cases} f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x) \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

or $f_n'(x) = e^{-x} g_n'(x) - e^{-x} g_n(x)$

et $g_n(0) = f_n(0)\, e^{0} = f_n(0) = 0$

avec $f_n'(x) = e^{-x} g_n'(x) - e^{-x} g_n(x)$

on a : $e^{-x} g_n'(x) = f_n'(x) + e^{-x} g_n(x)$

$g_n'(x) = e^{x} f_n'(x) + g_n(x)$

$= e^{x} f_{n-1}(x) - e^{x} f_n(x) + g_n(x)$

$= e^{x} f_{n-1}(x)$ donc

$g_n'(x) = e^{x} f_{n-1}(x)$ et $g_n(0) = 0$

par suite (2) $\Rightarrow$ (3).

Montrons que (3) $\Rightarrow$ (2) :

$\begin{cases} g_n'(x) = e^{x} f_{n-1}(x) \\ g_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} f_n'(x) = e^{-x}\left(g_n'(x) - g_n(x)\right) \\ \quad = e^{-x} g_n'(x) - e^{-x} g_n(x) \\ \quad = f_{n-1}(x) - f_n(x) \\ \text{et } f_n(0) = g_n(0)\, e^{0} = 0. \end{cases}$

donc (3) $\Rightarrow$ (2).

7

Ainsi

f_n satisfait aux conditions (2)

$\Longleftrightarrow$ (3) $\begin{cases} g_n'(x) = e^x f_{n-1}(x) \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$

2° a) calculons $g_2'(x)$, $g_2(x)$ et $f_2(x)$.

$\begin{cases} g_2'(x) = e^x f_1(x) \\ g_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow g_2'(x) = x$

car $f_1(x) = x e^{-x}$

$g_2'(x) = x$ et $g_2(0) = 0$ donc

$$\boxed{\forall x \in I \quad g_2(x) = \frac{1}{2}x^2}$$

avec $f_2(x) = g_2(x) e^{-x}$ on a

$$\boxed{f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} \quad \forall x \in I}$$

b) Montrons par recurrence que $\forall x \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

notons (P_n): $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

• pour $n = 1$ $f_1(x) = x e^{-x}$

$f_1(x) = \frac{x^1}{1!} e^{-x}$ et P_1 vraie.

• Soit n un entier naturel superieur ou égal à 1 et supposons $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ et

Montrons que $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$

avec $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ on a

$g_{n+1}'(x) = e^x f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Comme $g_{n+1}(0) = 0$ on a

$g_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{n!(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Ainsi

$f_{n+1}(x) = g_{n+1}(x) e^{-x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x}$

et P_{n+1} vraie.

D'après le principe de recurrence

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ $\forall x \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rq cela reste vrai pour f_0.

Partie C

8

$I_n(a) = \int_0^a f_n(x)\,dx$

1° $I_0(a) = \int_0^a e^{-x}\,dx$

$$\boxed{I_0(a) = -\left[e^{-x}\right]_0^a = 1 - e^{-a}}$$

2° Mq $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n e^{-a}}{n!}$

avec $f'_n(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$

par intégration sur $[0;a]$

on a :

$\int_0^a f'_n(x)\,dx = \int_0^a f_{n-1}(x)\,dx - \int_0^a f_n(x)\,dx$

$\left[f_n\right]_0^a = I_{n-1}(a) - I_n(a)$

$\dfrac{a^n e^{-a}}{n!} = I_{n-1}(a) - I_n(a)$

donc

$$\boxed{I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n e^{-a}}{n!}}$$

3° Mq $\forall n > 0$

$I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$

pour $n=1$ $I_1(a) - I_0(a) = -\dfrac{a e^{-a}}{1!}$

$n=2$ $I_2(a) - I_1(a) = -\dfrac{a^2}{2!}e^{-a}$

$n=3$ $I_3(a) - I_2(a) = -\dfrac{a^3}{3!}e^{-a}$

$\vdots$

$n=n$ $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$

Par addition membre à membre et après simplification on a :

$I_n(a) - I_0(a) = -\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$

or $I_0 = 1 - e^{-a}$ et $0! = 1$.

donc $\forall n > 0$ et $\forall a \in I$

$I_n(a) = 1 - e^{-a} - \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$

$$\boxed{I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!}\right)e^{-a}}$$

4° $a = 1$

$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

a) $\forall n > 0$ $\forall x \in [0;1]$

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x} \geq 0$ donc avec $0 < 1$

$$\boxed{u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

f_n continue et positive sur $[0;1]$ donc U_n est l'aire en unité d'aire du domaine limité par (C_n), l'axe (OI) et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1]$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq 1 \text{ et}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{n!}e^{-x} \leq \frac{x^n}{n!} \text{ car } \frac{x^n}{n!} \geq 0$$

d'où $\forall x \in [0;1]$

$$\boxed{0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}x^n}$$

c) Par intégration sur $[0;1]$ on a

⑨

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,dx$$

$0 \leq U_n \leq \frac{1}{n!(n+1)}$ d'où

$$\boxed{0 \leq U_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ donc

$\lim\limits_{+\infty} U_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

d) $\lim U_n = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{+\infty} 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = 0$$

$$\lim_{+\infty} e - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = 0$$

d'où $\lim\limits_{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) = e$