40 2006

C 404

DUREE : 4 Heures

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1

1- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) l'équation $3x - 4y = 6$

b) le système

$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 \ [8] \end{cases}$$

2- On pose $x = 18 + 32n$, $y = 12 + 24n$ et $S = (x+y)^{\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Déterminer suivant les valeurs de α le reste de la division euclidienne de S par 4.

EXERCICE 2

Dans le plan orienté (P), on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ,$$

k étant un élément de $\mathbb{Z}$. On pose $AB = a$ avec $a \in IR_+^*$

Soient I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan (P) tels que :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = a^2$$

1- Soit M un point du plan (P).

a) Démontrer que :

$$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow (MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2)$$

b) Justifier que le point O est l'isobarycentre des points I, J, K et L.

c) Démontrer que :

$$(M \in (\Gamma)) \Leftrightarrow \left(MO^2 = \frac{a^2}{4}\right)$$

d) Caractériser (Γ).

2- Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s la réflexion d'axe (AB). On pose $f = r \circ s$ et $(\Gamma') = f(\Gamma)$.

a) Déterminer la droite (Δ) telle que $r = \varphi \circ s$, où φ est la réflexion d'axe (Δ).

b) Caractériser l'application f.

c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ') (on prendra $a = 2$ cm).

Suite en page 2

PROBLEME

On considère la fonction f définie de IR vers IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} & si \ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} + 1 & si \ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{e}_1 , \vec{e}_2)$.

Première partie

1- a) Etudier les variations de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x - \ln x$.
   b) En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $x - \ln x \neq 0$.
2- Soit D l'ensemble de définition de f.
   a) Démontrer que $D = [-1 , +\infty[$
   b) Démontrer que f est continue sur D.
   c) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
   d) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.
3- a) Etudier les variations de f.
   b) Construire la courbe ($\mathscr{C}$).

Deuxième partie

4- On pose $I = [-1, 0]$ et $J = f(I)$.
Soit la fonction :

$$g : I \rightarrow J$$
$$x \mapsto f(x)$$

et ($\mathscr{C}'$) sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{e_1} , \vec{e_2})$.
   a) Démontrer que g est bijective.
   Soit g^{-1} la bijection réciproque de g.
   b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} puis construire sa courbe (Γ) dans le même repère que ($\mathscr{C}$).
   c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de J.
   d) Calculer

$$\int_{-1}^{0} \left[g^{-1}(x)\right] dx$$

Suite en page 3

5- Soit A l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

a) Calculer A.

b) En déduire l'aire du domaine plan compris entre les courbes $(\mathscr{C}')$ et (Γ).

Troisième partie

Pour tous nombres réels x et y tels que $0 < y < 1$, on considère le nombre complexe z défini par :

$$z = x + i\,\frac{y-1}{1+\sqrt{-y^2+2y}} \qquad \textit{avec } i^2 = -1$$

Soit (Γ') l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

6- Soit u un nombre complexe non nul.

Démontrer que :

$$\left(\arg u = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(u) = \operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Im}(u) < 0 \end{cases}$$

7- Soit $M(x,y)$ un point du plan.

a) Etablir que :

$$(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y-1}{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que

$$(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow \left(y = g^{-1}(x) + 1\right)$$

c) Démontrer que (Γ') est l'image de (Γ) par une translation t et caractériser t.

8- a) En déduire que (Γ') est l'image de $(\mathscr{C}')$ par la composée d'une symétrie orthogonale et de la translation t.

b) Préciser les éléments caractéristiques de cette composée.

FIN