Devoir de Maths N°1 TB

EXERCICE ①

1° (D_1) $3x+y=150$

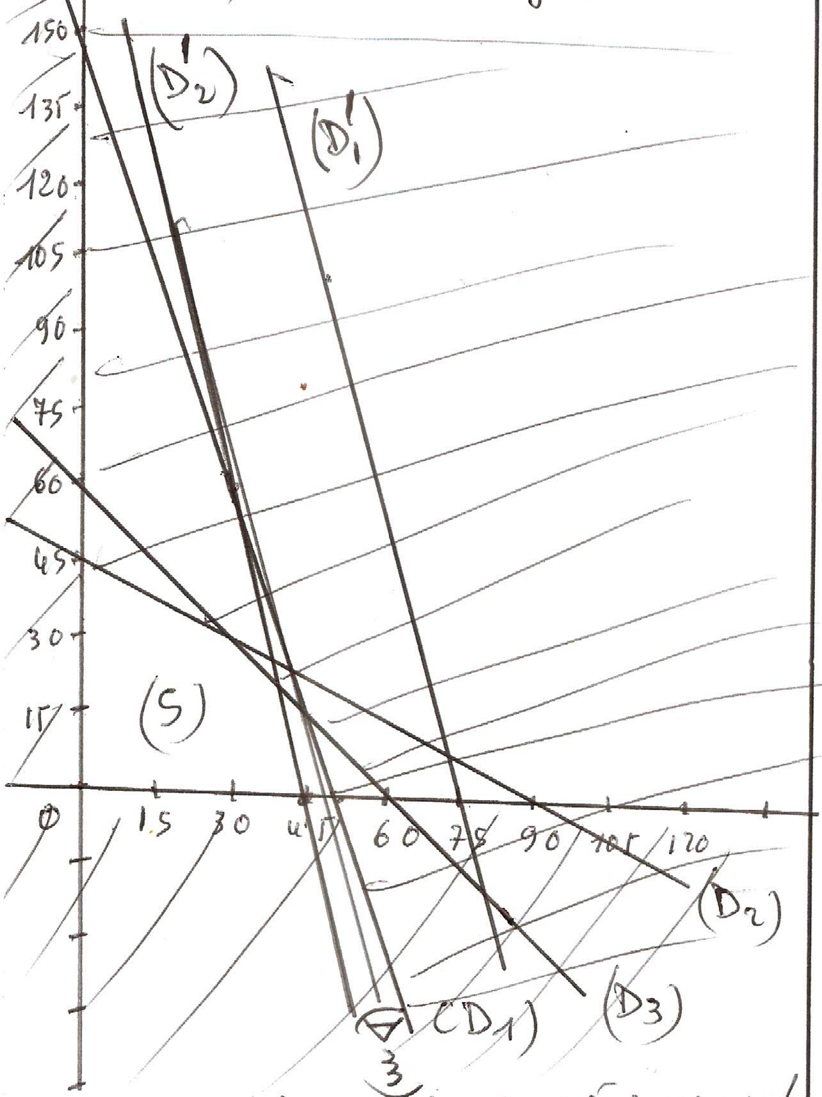
x	0	50
y	150	0

(D_2) $x+2y=90$

x	0	90
y	45	0

(D_3) $x+y=60$

x	0	60
y	60	0



La partie non hachurée représente la partie solution.

2° a) Tableau des données.

	Table x		Contrainte
Artisan A	x	y	60
Artisan B	x	$2y$	90
Artisan C	$3x$	y	150
Bénéfice	$20.000x$	$5000y$	

D'après le tableau des données on a le système.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 60 \\ x+2y \leq 90 \\ 3x+y \leq 150 \end{cases}$$

qui est le système (S).

b) Fonction économique bénéfice

$$\boxed{b = 20.000x + 5000y}$$

3° a) Traçons la droite (Δ) correspondant à $b = 1500.000$ Fcfa.

$1500.000 = 20.000x + 5000y$

ou

$300 = 4x + y$

x	75	50
y	0	100

La droite (D'_1) qui correspond à $b = 1500.000$F on n'a aucun point commun avec (S) donc ce bénéfice est irréalisable.

b) Traçons la droite (D'_2) pour $b = 900.000$ on a

$900.000 = 20.000x + 5000y$ ou

$180 = 4x + y$

x	45	30
y	0	60

oui car (D'_2) a au moins en commun avec la zone solution le point $A(45;0)$ dont les coordonnées sont entiers naturels.

c) La droite (D_m) d'ordonnée à l'origine maximale, qui maximise passe par le point $M(45;15)$ ce qui fait 45 tables et 15 chaises pour un bénéfice maximal de

$b_m = 20.000 \times 45 + 5000 \times 15$

$$\boxed{b_m = 975.000 \text{ Fcfa}}$$

Problème

1° Par lecture du Tableau de variation on a :

a) $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f(0) = -3$; $f(2) = 1$

$f'(0) = 0$ $\quad f'(2) = 1$

c) (T_0) $\quad y = -3$

d) -3 est le maximum de f sur $]-\infty; 1[$ atteint en 0 or $-3 < 0$ donc $f < 0$ sur $]-\infty; 1[$

1 est le minimum de f sur $]1; +\infty[$ atteint en 2 or $2 > 0$ donc $f > 0$ sur $]1; +\infty[$.

2° a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x^2 - 3x + 3 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x - 1 = 0 \ (x - 1 < 0) \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 1 = 0 \ (x - 1 > 0) \\ \lim\limits_{x \to 1} x^2 - 3x + 3 = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

b) $x - 2 + \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{(x-2)(x-1) + 1}{x - 1}$

$= \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

$= f(x)$ donc

$$\boxed{f(x) = x - 2 + \frac{1}{x - 1} \quad \text{pour } x \neq 1}$$

Remarque : Par division Euclidienne

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 3 & x - 1 \\ \hline -x^2 + x & x - 2 \\ \quad -2x + 3 & \\ \quad 2x - 2 & \\ \quad\quad 1 & \end{array}$$

donc

$f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x - 1}$

pour $x \neq 1$

c) $f(x) - (x-2) = \frac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc La droite (D) $y = x-2$ est une asymptote oblique à (C).

d)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	$\|$	$+$	

sur $]-\infty;1[$ $f(x)-y < 0$ et (C) est au dessous de (D)

sur $]1;+\infty[$ $f(x)-y > 0$ et (C) est au dessus de (D).

e) La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à (C).