DEVOIR DE MATHEMATIQUES

fi = 0,5 + 0,25 + 0,25

EXERCICE I (4)

Dans le plan orienté on considère deux points A et B (On prendra AB = 6 cm pour la figure).

0,5 1°) Déterminer et représenter l'ensemble (C), des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 3$.

2°) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M

0,25 du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

3°) a) Placer le point C image de B par la rotation r de

0,5 centre A et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, puis le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

0,5 b) On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D. Déterminer le rapport et l'angle de S.

0,5 c) On note Ω le centre de S. Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.

0,25 d) En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.

0,5 e) Démontrer que les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

EXERCICE II (5)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

0,75 1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

0,5 b) Ecrire les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous forme algébrique et sous forme

0,5 trigonométrique (z_1 est la solution dont la partie imaginaire est positive). Placer dans P les points A, d'affixe z_1, et B, d'affixe z_2.

2) On considère l'application f qui à tout point M distinct de O et d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{1}{\overline{z}}$

où $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

0,5+0,5 a) Calculer les affixes des points A' et B', images respectives de A et B par f. Placer ces points sur la figure.

0,5+0,25 b) Montrer que pour tout point M distinct de O les points O, M et M' sont alignés et que :

$$OM' . OM = 1.$$

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe non nul z on a :

0,5 $$|z - 2| = 2 \text{ si et seulement si } \left|\frac{1 - 2\overline{z'}}{\overline{z'}}\right| = 2$$

où $z' = \frac{1}{\overline{z}}$

0,5 En déduire que :

$$|z - 2| = 2 \text{ si et seulement si } \left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$$

b) soit (C) le cercle de centre I, d'affixe 2, et de rayon 2.

0,5 i. Montrer que [AB] est un diamètre de (C).

ii. Soit M un point de (C) distinct de O.

0,5 Montrer que M' est situé sur une droite (D) dont on donnera une équation. Placer (C) et (D) sur la figure.

PROBLEME (11)

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur I =]- 1, +∞[par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + x}.$$ (5)

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 5 cm.

1) Etudier les variations de la fonction f et déterminer ses limites aux bornes de I. En déduire que (C) admet une droite asymptote (Δ) que l'on précisera. 1,5

2) a) Ecrire l'équation de la tangente à (C) en un point M de (C), d'abscisse a. On note (T_a) cette tangente. 0,5

b) Montrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles la droite (T_a) passe par l'origine O. 0,5

3) Tracer la courbe (C). On mettra en évidence la droite (Δ) et les deux tangentes trouvées ci-dessus. 1,5

4) On pose, pour x ∈ I, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

La fontion F est-elle monotone? Est-elle positive? 1

PARTIE B (6)

On pose $J = \int_0^1 \frac{e^t}{1 + t}\,dt$.

L'objet de cette partie est d'encadrer l'intégrale J. On cherchera pas à calculer la valeur exacte de J.

1) En utilisant l'étude de la fonction f réalisée dans la partie A, montrer que $1 \leq J \leq \frac{e}{2}$ 0,25 + 0,25

2) On pose, pour tout entier naturel n,

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t\,dt.$$ 0,25 + 0,25

a) Calculer u_0.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie que

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) u_n$$ 0,75

c) Calculer alors successivement $u_1, u_2, \dots, u_6$. On donnera les réponses sous la forme ae + b avec a et b entiers naturels. 1,5

3) a) Montrer que :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \int_0^1 e^t \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}}{1 + t}\,dt.$$ 0,5

b) En déduire :

$J = u_0 + u_1 + \dots + u_n + R_n$, avec 0,5

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t)\,dt.$$

c) Prouver que : $\frac{1}{n + 2} \leq |R_n| \leq \frac{e}{2(n + 2)}$. 0,5

4) a) Trouver le plus petit entier n tel que :

$$\frac{e}{2(n + 2)} - \frac{1}{n + 2} < 0{,}05.$$ 0,5

b) Calculer $S_6 = u_0 + u_1 + \dots + u_6$ sous la forme ae - b, avec a et b entiers naturels. 0,25

c) Prouver que $S_6 - \frac{e}{16} \leq J \leq S_6 - \frac{1}{8}$. 0,25

d) Déduire de ce qui précède un encadrement de J, d'amplitude inférieure à 0,05, par deux nombres décimaux. 0,25

I

1° $\frac{MA}{MB}=3 \Leftrightarrow MA = 3MB \Leftrightarrow MA^2-9MB^2=0$

$\Leftrightarrow (\vec{MA}-3\vec{MB})\cdot(\vec{MA}+3\vec{MB})=0 \Leftrightarrow$

$-2\vec{MG_1}\cdot 4\vec{MG_2}=0 \Leftrightarrow \vec{MG_1}\cdot\vec{MG_2}=0$

$\Leftrightarrow M \in \mathcal{E}([G_1G_2])$ avec $G_1 = bar\begin{pmatrix}A|B\\1|-3\end{pmatrix}$

$G_2 = bar\begin{pmatrix}A|B\\1|3\end{pmatrix}$

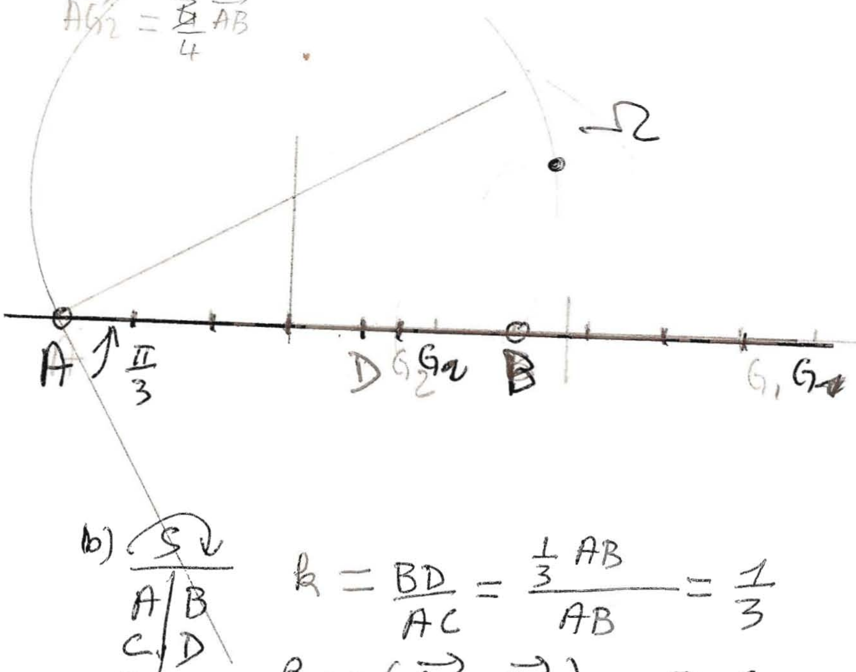
2° $(\vec{MA},\vec{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow M$ appartient à l'arc capable $\overset{\frown}{AB}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$, d'extrémités A et B non comprises.

3° a) $\vec{AG_1} = \frac{3}{2}\vec{AB}$, $\vec{AG_2}=\frac{3}{4}\vec{AB}$

$\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

$\vec{AG_1} = \frac{3}{2}\vec{AB}$

$\vec{AG_2} = \frac{3}{4}\vec{AB}$



b) S: $\begin{array}{c|c} A & B \\ C & D \\ \Omega & \Omega \end{array}$

$k = \frac{BD}{AC} = \frac{\frac{1}{3}AB}{AB} = \frac{1}{3}$

$\theta = (\vec{AC},\vec{BD}) = \frac{\pi}{3}$ car

$\theta = (\vec{AC},\vec{AB}) + (\vec{AB},\vec{BD}) = (\vec{AC},\vec{AB})+(-\vec{BA},\vec{BD})$

$\theta = -\frac{2\pi}{3}+\pi = \frac{\pi}{3}$

donc le rapport de S est $\frac{1}{3}$ et l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$.

c) si Ω est le centre de S on a :

$\Omega B = \frac{1}{3}\Omega A$ et $(\vec{\Omega A},\vec{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}$

d) on a alors $\frac{\Omega A}{\Omega B}=3$ et $(\vec{\Omega A},\vec{\Omega B})=\frac{\pi}{3}$

Ω est l'unique point commun à (C) et (E)

e) $(\vec{\Omega C},\vec{\Omega D}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{AC},\vec{AD}) = (\vec{AC},\vec{AB}) = -\frac{2\pi}{3}$

or $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$ donc $(\vec{\Omega C},\vec{\Omega D}) = (\vec{AC},\vec{AD})$ $[\pi]$

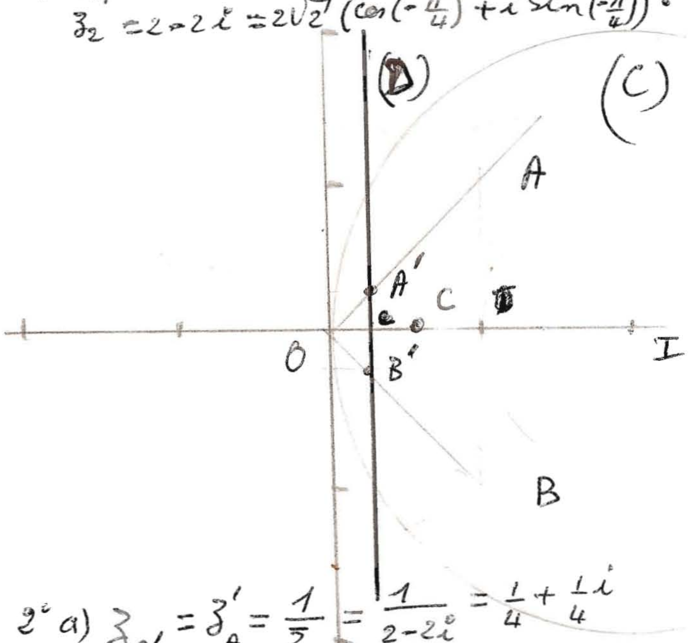
or $\frac{\pi}{3}\neq 0\ [\pi]$, les points Ω A C D n'étant pas alignés sont cocycliques.

II 1° a) $z^2-4z+8=0$ $\quad \Delta=-16=16i^2$

$S_{\mathbb{C}} = \{2-2i; 2+2i\}$

b) $z_1 = 2+2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$z_2 = 2-2i = 2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$.



2° a) $z_{A'} = z'_A = \frac{1}{\bar z_A} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

$z_{B'} = \frac{1}{\bar z_B} = \frac{1}{2+2i} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

b) $\bar z z' = 1 \Leftrightarrow \arg z'\bar z = 0 = \arg z' + \arg\bar z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \arg z' - \arg z = 0 \Leftrightarrow \arg\frac{z'}{z}=0$

$\Leftrightarrow (\vec{OM},\vec{OM'})=0\ [2\pi] \Rightarrow O, M, M'$ alignés

$\bar z z'=1 \Leftrightarrow |\bar z z'|=1 \Leftrightarrow |\bar z||z'|=1$

$\Leftrightarrow |z||z'|=1 \Leftrightarrow OM\times OM'=1$

d'où O, M, M' alignés et $OM \times OM' = 1$

3° a) $\left|\frac{1-2\bar z'}{\bar z'}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\bar z'}-2\right|=2 \Leftrightarrow |z-2|=2$

$|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2\bar z'}{\bar z'}\right|=2 \Leftrightarrow |1-2\bar z'| = 2|\bar z'|$

$\Leftrightarrow |\frac{1}{2} - \bar z'| = |\bar z'|$

$\Leftrightarrow |\frac{1}{2} - z'| = |z'|$

b) i) $AI = |z_A-2| = |2i|=2$

$BI = |z_B - 2| = |-2i| = 2$

$\frac{z_A+z_B}{2} = 2 = z_I$

A, B ∈ (C) et I milieu de [AB]

donc [AB] est un diamètre de (C).

ii) $M\in(C) \Leftrightarrow |z-2|=2 \Leftrightarrow |z'-\frac{1}{2}|=|z'|$

$\Leftrightarrow M'C = M'O$ où $C(\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow M' \in (D)$ médiatrice de [CO].

(D) $x = \frac{1}{4}$

Problème (A) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ $x > -1$

f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x e^x}{(1+x)^2}$

x	-1		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{-1^+} f = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

La droite d'éq $x = -1$ est une asy. verticale.

2° a) (T_a) $y = \dfrac{a e^a}{(1+a)^2}(x-a) + \dfrac{e^a}{1+a}$

b) $$y = \frac{a e^a}{(1+a)^2} x - \left[\frac{a^2-a-1}{(1+a)^2}\right] e^a.$$

$O\binom{0}{0} \in (T_a) \iff a^2 - a - 1 = 0 \iff a = \dfrac{1+\sqrt5}{2}$ ou $a = \dfrac{1-\sqrt5}{2}$

3) fig.

4° $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ $x \in I =]-1;+\infty[$

F est la primitive de f qui s'annule en 0

donc $\forall x > -1$ $F'(x) = f(x) = \dfrac{e^x}{1+x} > 0$

F est strictement croissante.

x	-1	0	$+\infty$
F'		$+$	
$F(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

sur $]-1;0[$ $F < 0$ et sur $]0;+\infty[$ $F > 0$

$\boxed{B}$ 1° $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+t}\,dt$ f croiss sur $[0;1]$

$0 \le t \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(t) \le f(1) \Rightarrow 1 \le f(t) \le \dfrac{e}{2}$

par integ sur $[0;1]$ on a $1 \le \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \le \frac{e}{2}$

ainsi $\boxed{1 \le J \le \dfrac{e}{2}}$

2° $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,dt$

a) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 e^t\,dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1$

$u_{n+1} = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} e^t\,dt$

$u = t^{n+1}$ $u' = (n+1)t^n$

$v' = e^t$ $v = e^t$

$u_{n+1} = (-1)^{n+1}\left[t^{n+1} e^t\right]_0^1 - (-1)^{n+1}(n+1)\displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,dt$

$\boxed{u_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1) u_n}$

c) $u_0 = e - 1$ $u_2 = e - 2$

$u_1 = -e + u_0 = -1$ $u_3 = 2e - 6$

$u_4 = 9e - 24$ $u_5 = 44e - 120$

$u_6 = 265e - 720$.

3° a)

$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t + t^2 - t^3 \dots + (-t)^n\right) e^t\,dt$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} e^t\,dt.$

b) $= \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+t}\,dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} e^t\,dt$ donc

$J = u_0 + u_1 + \dots + u_n + R_n$ avec

$R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} e^t\,dt.$

c) $|R_n| = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} e^t\,dt$

$1 \le f(t) \le \dfrac{e}{2} \Rightarrow t^{n+1} \le t^{n+1} f(t) \le t^{n+1}\dfrac{e}{2} \Rightarrow$

$\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\,dt \le \int_0^1 t^{n+1} f(t)\,dt \le \frac{e}{2}\int_0^1 t^{n+1}\,dt$

$\boxed{\dfrac{1}{n+2} \le |R_n| \le \dfrac{e}{2(n+2)}}$ $\forall n$

4) a- $\dfrac{e}{2(n+2)} - \dfrac{1}{n+2} < 0{,}05 \iff \dfrac{e-2}{2(n+2)} < 0{,}05$

$\dfrac{e-2}{n+2} < 0{,}1 \iff \dfrac{e-2}{0{,}1} < n+2 \iff 10(e-2) - 2 < n$

$5{,}2 < n$ on a $\boxed{n = 6}$

b- $S_6 = u_0 + u_1 + \dots + u_6 = 322e - 874$
$\simeq 1{,}28674876$

$J - S_n = R_n$ et $|J - S_n| = |R_n|$

$\dfrac{1}{n+2} \le |J - S_n| \le \dfrac{e}{2(n+2)}$ avec $n = 6$

$\dfrac{1}{8} \le |J - S_6| \le \dfrac{e}{16}$ or $J - S_6 = R_6 <$

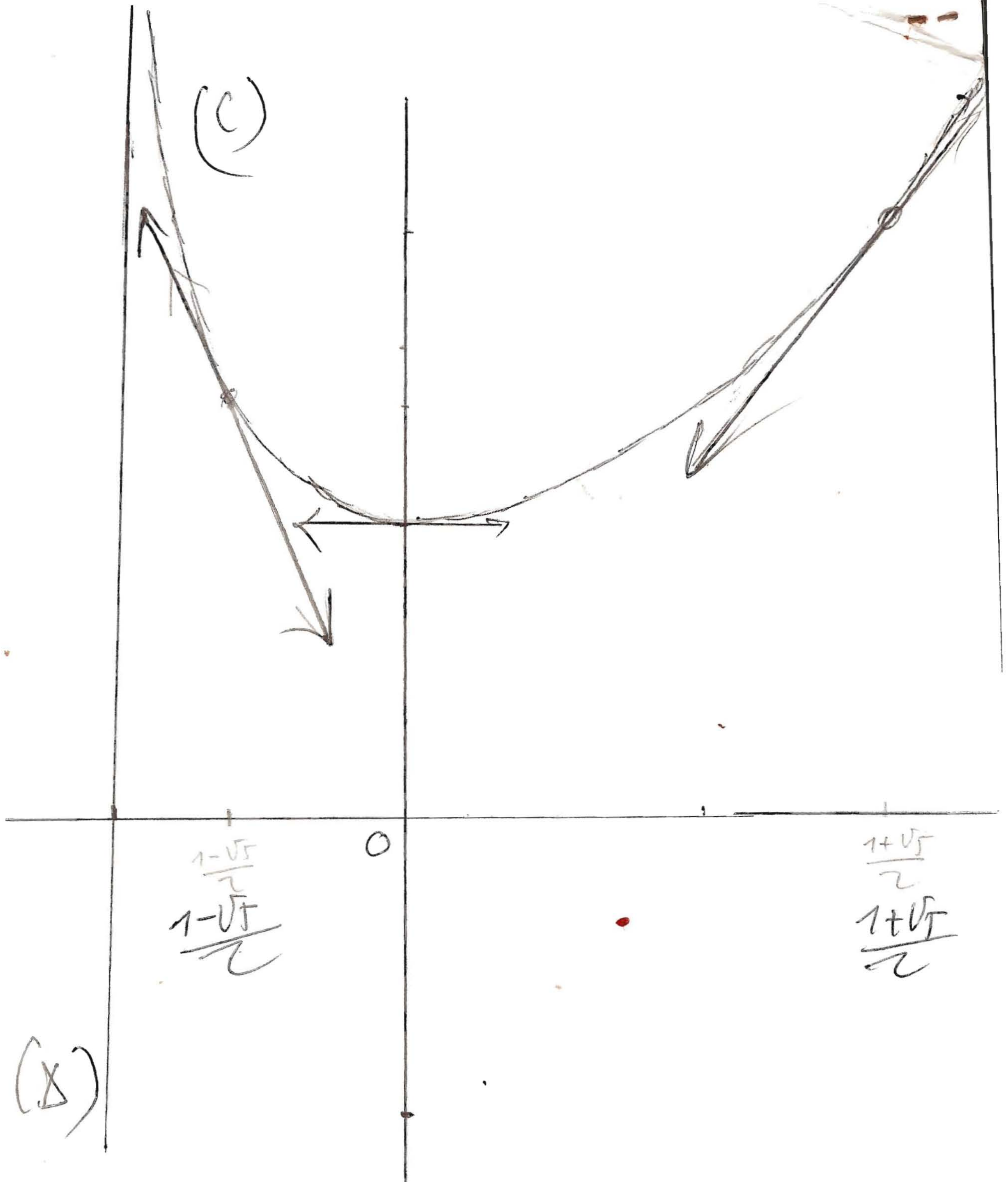
donc $|J - S_6| = S_6 - J$ on a alors

$\dfrac{1}{8} \le S_6 - J \le \dfrac{e}{16} \Rightarrow -\dfrac{e}{16} \le J - S_6 \le -\dfrac{1}{8}$

et $\boxed{S_6 - \dfrac{e}{16} \le J \le S_6 - \dfrac{1}{8}}$

d) $1{,}116856146 \le J \le 1{,}16174876$

$\boxed{1{,}116 \le J \le 1{,}166}$



x	$-0,5$	0	1
$f(x)$			$\frac{e}{2}$