LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO

Devoir de maths N° 3 TB.

Durée : 3h
Coefficient : 3

Exercice1 (5 points)

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

1° a) Calculer $P(-1)$.

b) En déduire une factorisation de $P(x)$.

c) Résoudre dans IR, l'équation $P(x) = 0$

d) Etudier le signe de $P(x)$.

2° Déduire de 1°, la résolution dans IR, des équations et inéquations suivantes :

a) $2\ln x - 5 + \frac{2}{\ln x} = 0$

b) $\ln(2x-3) + \ln(x+2) = \ln(6x-8)$

c) $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 < 0$

d) $2[\ln(x-2)]^3 - 3[\ln(x-2)]^2 - 3\ln(x-2) + 2 = 0$

Exercice 2, (4 points)

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 4 boules roses indiscernables au toucher.

1°) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles?

b) Combien y a-t-il de tirages contenant 2 boules roses?

c) Combien y a-t-il de tirages contenant 2 boules de même couleur ?

d) Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule blanche ?

e) Combien y a-t-il de tirages contenant une boule de chaque couleur ?

2°On tire au hasard et successivement avec remise 3 boules de l'urne.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
b) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
c) Combien y a-t-il de tirage contenant au moins une boule blanche ?

PROBLEME (11 points)

Partie A :Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par: $f(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1° a) Calculer les limites aux bornes de $]0; +\infty[$.

b) Calculer la dérivée f ' de f.

c) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) En déduire que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) > 0$.

PARTIE B Etude de fonction.

On considère maintenant la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par: $g(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$

On appelle *(C)* la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O,I,J). (On prendra pour unité 2 cm).

1° Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2° a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$ $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

3° Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4° a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe *(C)*.

b) Etudier la-position de la courbe *(C)* par rapport à (Δ).

c) Déterminer les coordonnées du point A où la tangente à (C) est parallèle à la droite (Δ).

d) Montrer qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse e est $y = x + \frac{2}{e}$.

5° a) Démontrer l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α.

b) Montrer que α, appartenant à $[0,7 ; 0,8]$.

6° Dans le repère (O,I,J), tracer la courbe *(C)*, la droite (Δ) et la tangente (T).

Partie C :

Soit G la fonction définie sur $]0;+\infty[$, par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (\ln x)^2$.

a) Montrer que G est une primitive de g.
b) Calculer $G(e) - G(1)$.

NB : Pour construire (T) prendre e = 2,7.

Devoir de Math N°3 T_B | 2012-2013

EXERCICE 1

1

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

1° a) $P(-1) = -2 - 3 + 3 + 2 = -5 + 5 = 0$

b) Par la division euclidienne on a :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 & x+1 \\ \hline -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 5x + 2 \\ -5x^2 - 3x + 2 & \\ 5x^2 + 5x & \\ 2x + 2 & \\ -2x - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

donc $\boxed{P(x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)}$

c) Résolvons l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

$x + 1 = 0$ ou $2x^2 - 5x + 2 = 0$

$x = -1$ $\qquad \Delta = 9 > 0$

$x' = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$x'' = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

l'ensemble des solutions est

$\boxed{S = \{-1 ; \frac{1}{2} ; 2\}}$

d) Etudions le signe de $P(x)$

Tableau de signe de $P(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-5x+2$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

sur $]-\infty ; -1[\cup]\frac{1}{2} ; 2[$ $\quad P < 0$

sur $]-1 ; \frac{1}{2}[\cup]2 ; +\infty[$ $\quad P > 0$

sur $\{-1 ; \frac{1}{2} ; 2\}$ $\quad P = 0$

2° a) Résolvons l'équation

$2\ln x - 5 + \frac{2}{\ln x} = 0$

• Soit D_1 l'ensemble de validité

on a : $x \in D_1 \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq 1$

donc $\boxed{D_1 =]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[}$

• Résolution.

$x \in D_1$ et $2\ln x - 5 + \frac{2}{\ln x} = 0$

$2(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 2 = 0$

posons $\ln x = X$ on a :

$2X^2 - 5X + 2 = 0$ et

d'après 1° c) on a :

$X = \frac{1}{2}$ ou $X = 2$

$\ln x = \frac{1}{2}$ ou $\ln x = 2$

$x = e^{\frac{1}{2}}$ ou $x = e^2$

l'ensemble de solution est

$\boxed{S_1 = \{e^{\frac{1}{2}} ; e^2\}}$

b) Résolvons l'équation

$\ln(2x-3) + \ln(x+2) = \ln(6x-8)$

Soit D_2 l'ensemble de validité de l'équation

$x \in D_2 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0$ et $x + 2 > 0$ et $6x - 8 > 0$

on trouve $x > \frac{3}{2}$, $x > -2$ et $x > \frac{4}{3}$

donc $\boxed{D_2 =]\frac{3}{2} ; +\infty[}$

2

• Résolution

$x \in D_2$ et $\ln(2x-3) + \ln(x+2) = \ln(6x-8)$

$\ln(2x-3)(x+2) = \ln(6x-8)$

$(2x-3)(x+2) = 6x-8$

$2x^2 + x - 6 = 6x - 8$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

D'après 1°c on a :

$x = \frac{1}{2} \notin D_2$ ou $x = 2 \in D_2$

d'où $\boxed{S_2 = \{2\}}$

c) Résolvons l'inéquation

$2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 < 0$

• $\boxed{D_3 =]0 ; +\infty[}$

• Résolution de

$2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3(\ln x) + 2 < 0$

Posons $X = \ln x$

$2X^3 - 3X^2 - 3X + 2 < 0$

D'après 1°c on a

$X \in]-\infty ; -1[\cup]\frac{1}{2} ; 2[$

$\ln x \in]-\infty ; -1[\cup]\frac{1}{2} ; 2[$

$x \in]0 ; e^{-1}[\cup]e^{\frac{1}{2}} ; e^2[$

$\boxed{S_3 =]0 ; e^{-1}[\cup]e^{\frac{1}{2}} ; e^2[}$

$\boxed{S_3 =]0 ; e^{-1}[\cup]e^{\frac{1}{2}} ; e^2[}$

d) Résolvons l'équation

$2[\ln(x-2)]^3 - 3[\ln(x-2)]^2 - 3\ln(x-2) + 2 = 0$

• $\boxed{D_4 =]2 ; +\infty[}$

• Résolution

Posons $\ln(x-2) = X$ on a :

$2X^3 - 3X^2 - 3X + 2 = 0$

D'après 1°b) on a :

$X = -1$ ou $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 2$

$\ln(x-2) = -1$ $\quad \ln(x-2) = \frac{1}{2}$ $\quad \ln(x-2) = 2$

$x - 2 = e^{-1}$ $\quad x - 2 = e^{\frac{1}{2}}$ $\quad x - 2 = e^2$

$x = 2 + e^{-1}$ $\quad x = 2 + e^{\frac{1}{2}}$ $\quad x = 2 + e^2$

$x = 2 + \frac{1}{e}$

$\boxed{S_4 = \{2 + e^{-1} ; 2 + e^{\frac{1}{2}} ; 2 + e^2\}}$

EXERCICE 2

3

L'urne contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 4 boules roses.

1° on tire simultanément 3 boules de l'urne.

1° a) on tire simultanément 3 parmi 9 donc le nombre de tirages possibles est $C_9^3 = \frac{A_9^3}{3!} = \boxed{84}$

b) on tire 2 boules roses parmi 4 et une autre couleur parmi 5 donc le nombre de tirage contenant 2 boules roses est $C_4^2 \times C_5^1 = \boxed{30}$

c) Il s'agit de trouver le nombre de tirage contenant 2 boules blanches, ou 2 boules vertes ou 2 boules roses, donc le nombre de possibilités est

$$C_2^2 \times C_7^1 + C_3^2 \times C_6^1 + C_4^2 \times C_5^1 =$$

$$7 + 3 \times 6 + 30 = \boxed{55}$$

d) Le nombre de tirage contenant au moins une boule blanche est

$$C_9^3 - C_7^3 = 84 - 35 = \boxed{49}$$

e) Le nombre de tirage contenant une boule de chaque couleur.

est $C_2^1 \times C_3^1 \times C_4^1 = \boxed{24}$

2° on tire successivement avec remise 3 boules.

a) Le nombre de tirages possibles est $9^3 = \boxed{729}$

b) Le nombre de tirages unicolores est : $\boxed{B|B|B}$ ou $\boxed{V|V|V}$ ou $\boxed{R|R|R}$

$2 \times 2 \times 2$ $\quad 3 \times 3 \times 3$ $\quad 4 \times 4 \times 4$

on a alors $2^3 + 3^3 + 4^3 = \boxed{99}$

c) Le nombre de tirage contenant au moins une boule blanche est :

$$9^3 - 7^3 = 729 - 343$$

$$= \boxed{386}$$

Problème :

4

Partie A

$f(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1° a) Calcul de limites

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x^2 + 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} -2\ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(x + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

b) f est dérivable sur $]0; +\infty[$

et $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$

$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x}(x^2 - 1) = \frac{2}{x}(x-1)(x+1)}$

c) $x > 0$, $x + 1 > 0$ $2 > 0$

$f'(x)$ est de signe de $x - 1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	

sur $]0; 1[$ $f'(x) < 0$ et f est décroissante sur $]0; 1]$

sur $]1; +\infty[$ $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $[1; +\infty[$

d) Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{f(1) = 3}$

2) D'après le tableau de variation 3 est le minimum de f sur $]0; +\infty[$ atteint en 1, or $3 > 0$ d'où $f(x) > 0$.

Partie B

$g(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

1° Calcul de limite

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2° a) g est dérivable sur $]0; +\infty[$

et $g'(x) = 1 + 2\,\frac{1 - \ln x}{x^2}$

$\boxed{g'(x) = \frac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2}}$

b) or $f(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

donc $\boxed{g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}}$

3° $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ et comme $x^2 > 0$
$g'(x)$ est de signe de $f(x)$ et
$f(x) > 0$ d'après partie A
donc $g'(x) > 0$ et g est
croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4° a) $f(x) - x = \frac{2\ln x}{x}$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$ donc la droite
(Δ) d'équation $y = x$
est une asymptote à (C).

b)

x	0		1		$+\infty$
$\frac{2\ln x}{x}$	‖	$-$	0	$+$	

sur $]0;1]$ $f(x) - y < 0$ et
(C) au dessous de (Δ)
sur $[1;+\infty[$ $f(x) - y > 0$ et
(C) est au dessus de (Δ)
au point d'abscisse 1
(C) coupe (Δ).

c) Déterminons les coordonnées du point A où la tangente à (C) est parallèle à (Δ).

on a : $g'(x) = 1 = \frac{f(x)}{x^2}$
$f(x) = x^2 \Leftrightarrow 2 - 2\ln x = 0$
$\Rightarrow -2\ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$
$x = e$ et $g(e) = e + \frac{2}{e}$
Ainsi $\boxed{A\left(e; e + \frac{2}{e}\right)}$

d) Déterminons une équation de la tangente (T) au point d'abscisse e.
(T) $y = g'(e)(x - e) + g(e)$
$y = 1(x - e) + e + \frac{2}{e}$
$y = x - e + e + \frac{2}{e}$
(T) $\boxed{y = x + \frac{2}{e}}$

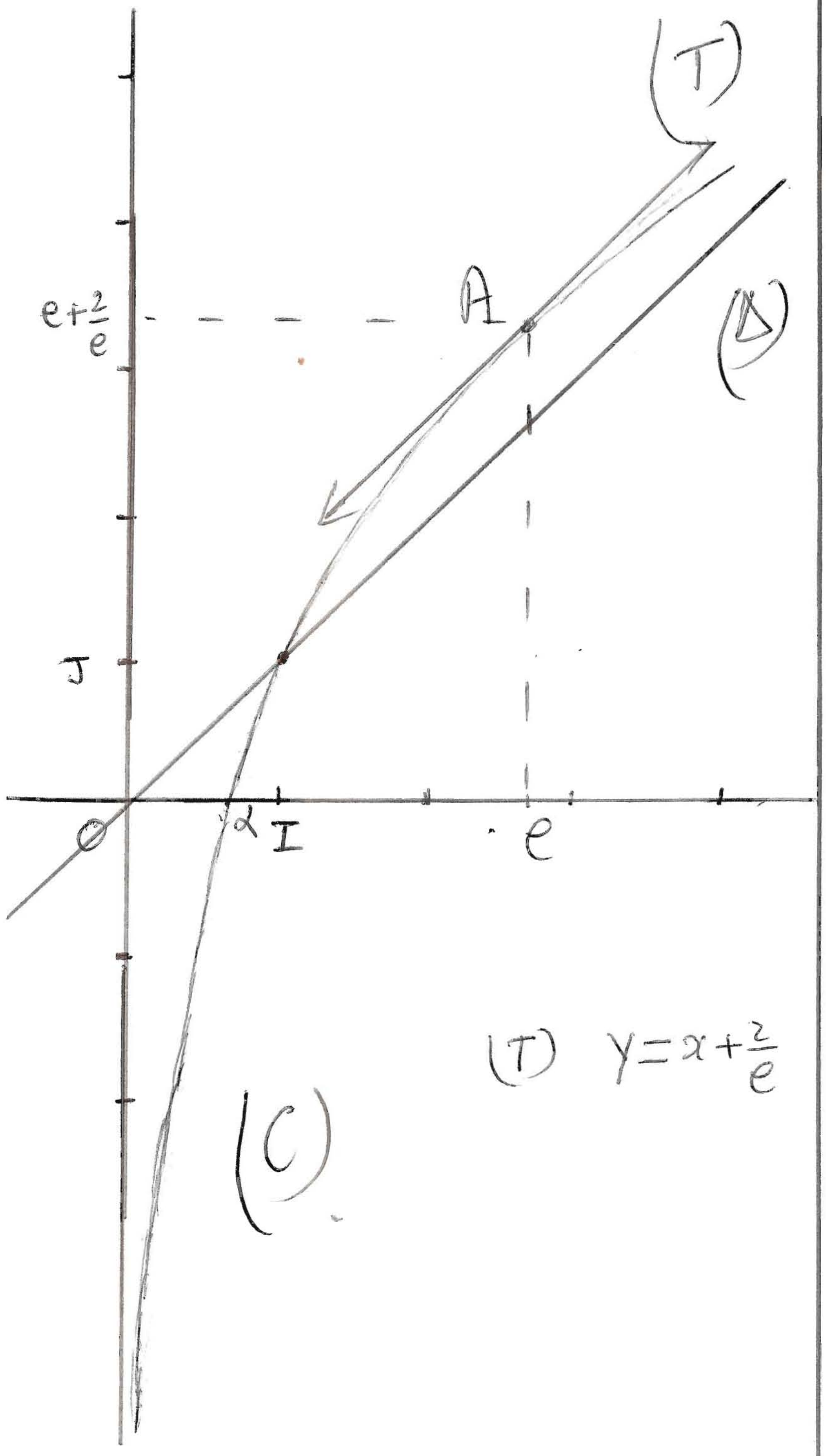
5° a) g est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$, or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α.

b) $g(0,7) \simeq -0,31 < 0$

$g(0,8) \simeq 0,24 > 0$

$g(0,7) < 0 < g(0,8)$ donc

$\boxed{0,7 < \alpha < 0,8}$



Partie C

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + (\ln x)^2$

a) G est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$G'(x) = x + 2\frac{\ln x}{x}$

$G'(x) = g(x)$ donc

G est une primitive de g.

b)

$G(e) - G(1) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}$

$\boxed{G(e) - G(1) = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}}$