MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA JEUNESSE, DES SPORTS
CHARGE DE LA CONDITION FEMININE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
LYCEE D'ETAT DE PORT-GENTIL
B.P. 236 55.21.73

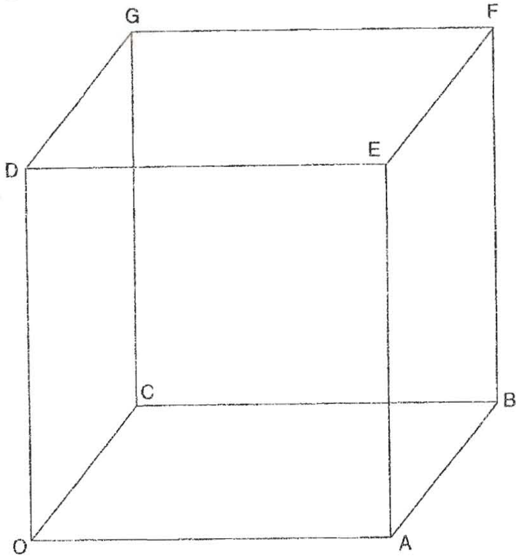
Epreuve de Mathématiques

N°6

Série : C
Coeff. : 5
Durée : 4 h.

EXERCICE I

4



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O\,;\,\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

On désigne par a un réel strictement positif.

L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$. 0,5

b. En déduire l'aire du triangle DLM. 0,5

c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM). 0,5

2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a. Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$. 0,25

b. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OK}$.

Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

c. Déterminer les coordonnées de H. 0,25

d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$. 0,25 + 0,5

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a. 0,5

EXERCICE II (5 points)

Partie A:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité 1 cm), on considère le point G_0 d'affixe $z_0 = re^{i\theta}$, où r et θ sont deux nombres réels fixés avec $r > 0$.

Soit M_0 le point d'affixe Z_0 tel que le triangle OG_0M_0 soit équilatéral direct. On désigne par G_1 le centre de gravité du triangle OG_0M_0.

1°) a) Démontrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0,5

b) Exprimer Z_0 en fonction de z_0. 0,25

c) Démontrer que le point G_1 d'affixe z_1 est l'image du point G_0 par la similitude directe S de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. 0,25

2°) On définit dans le plan P les deux suites de points $(M_n)_{n\geq 0}$ et $(G_n)_{n\geq 0}$ telles que, pour tout entier naturel n, le triangle OG_nM_n soit un triangle équilatéral direct de centre de gravité G_{n+1}.

a) Pour tout entier n, on désigne par z_n l'affixe de G_n et Z_n l'affixe de M_n. Démontrer que : $G_{n+1} = S(G_n)$ et exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. 0,5

b) Pour tout entier n, exprimer z_n en fonction de n, r et θ. 0,5

3°) On suppose dans cette question que $z_0 = 8\, e^{i\frac{\pi}{4}}$. Placer les points G_0, G_1, G_2, G_3 et G_4. 1

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, on considère la suite de points $(K_n)_{n\geq 0}$ telle que $\overrightarrow{G_nK_n} = \overrightarrow{OG_n} \wedge \overrightarrow{OG_{n+1}}$, où les points G_0, G_1, ..., G_n, ... sont ceux de la partie A situés dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) a) Montrer que $G_0K_0 = \dfrac{r^2\sqrt{3}}{6}$. 0,25

b) En déduire l'aire du triangle OG_0G_1 en fonction de r. 0,25

2°) On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = G_nK_n$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Puis en déduire un en fonction de r et de n. 0,5

3°) Pour tout n, on note S_n la somme des aires des triangles OG_0G_1 ; OG_1G_2 ; ... ; $OG_{n-1}G_n$. Exprimer S_n en fonction de r et n et calculer la limite de S_n quand n tend vers l'infini. 0,75 0,25

PROBLEME

PARTIE A *Etude d'une fonction exponentielle*

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1- On note f ', f '' et $f^{(3)}$ les dérivées successives de f. Etablir que : 0,75

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f^{(3)}(x) = 4x(3 - 2x^2)e^{-x^2}$

2- Etudier les variations de f '' et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,5

3- En déduire que $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |\, f''(x)\,| \leq 2$ 0,25

PARTIE B *Calcul approché d'une intégrale.*

On souhaite obtenir une valeur approchée de l'intégrale : $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à 10^{-2} près.

B1

Soit u la fonction affine croissante définie par $u(x) = \alpha x + \beta$ et soit g la fonction composée définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (f o u)(x)$. On pose $\phi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.

1- Sans chercher à calculer $\phi(x)$, établir que si G est une primitive de la fonction g alors : 0,25

$\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \phi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$.

2- En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \phi''(x) = g'(x) - g'(-x)$. 0,5

3- a. Démontrer en utilisant **PARTIE A 3-** que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|\, g''(x)\,| \leq 2\alpha^2$. 0,5

b. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ |\,\phi''(x)\,| \leq 4\alpha^2 x$ 0,25 + 0,25

c. Par intégrations successives, démontrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ -\frac{2}{3}\alpha^2x^3 \leq \phi(x) \leq \frac{2}{3}\alpha^2x^3$.

c. Encadrer $\phi(1)$ et en déduire que : $-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{+1} g(t)dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$. 0,25 + 0,25

B2

1- Démontrer que $\int_{-1}^{+1} g(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)du$ 0,5

2- On se place dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2n}$ et $\beta = \frac{2k+1}{2n}$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Etablir que :

$$\forall\ k \in \{0,1,\ldots,n-1\} \quad -\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$$ 0,5

3- En déduire que :

$$\left|\, \int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right| \leq \frac{1}{12n^2}$$ 0,5 + 0,25

4- Déterminer le plus petit entier n qu'il faut prendre pour avoir une valeur approchée de I à 10^{-2} près. En déduire que I a une valeur approchée de 0,75. 0,25 + 0,5

PARTIE C *Etude d'une fonction définie par une intégrale*

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1- Démontrer que F est définie et continue sur IR. 0,25

2- Etudier la parité de F. 0,25 + 0,25

3- Quel est le sens des variations de F ? 0,25 + 0,25 + 0,25

4- a. Démontrer que $\forall\ t \geq 1,\ e^{-t^2} \leq e^{-t}$. 0,25

b. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite de terme général $u_n = F(n)$. Démontrer que cette suite est croissante et majorée par $I + \frac{1}{e}$. 0,25 + 0,25

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $L \leq 1,13$. 0,25 + 0,25

d. Quelle conclusion obtient – on en ce qui concerne la limite de la fonction F lorsque x tend vers $+\infty$? 0,25

5° Donner le T.V de (F) et construire (C_F)

$O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $K\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}a\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}0\\a\\-1\end{pmatrix}$

1°a) Determinons $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$

avec la disposition
$$\begin{matrix} a & 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & a \end{matrix}$$

on a $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}(a\,;a\,;a^2)$. 0,5

b) $\mathcal{A}_{DLM} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2+a^4}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+a^4} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2(2+a^2)}$

donc $\mathcal{A}_{DLM} = \frac{a}{2}\sqrt{2+a^2}$ 0,5

c) Mq $(OK)\perp(DLM)$

$\overrightarrow{OK} = a\,\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$ donc (OK) est orthogonal au plan (DLM) car $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$ colinéaires.

2° on note H le projeté orthogonal de O et de K sur le plan (DLM).

a) $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = (\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM})\cdot\overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK}$

car $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{OK} = 0$ donc

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK}$.

b) Soit $d\in\mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{OH} = d\,\overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = a$ or

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK} = d\,\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OK} = d\,OK^2 = d(2+a^2)$

avec $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK}$ on a

$a = d(2+a^2)$ et alors $\boxed{d = \frac{a}{2+a^2}}$

0,5

Par ailleurs $d = \frac{a}{a^2+2} \in]0;1]$

donc $H\in[OK]$. 0,25

c) coordonnées de H.

$\overrightarrow{OH} = d\,\overrightarrow{OK}$ et $K\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$ donc 0,25

$H\begin{pmatrix}d\\d\\da\end{pmatrix}$ d'où $H\left(\frac{a}{a^2+2}\,;\frac{a}{a^2+2}\,;\frac{a^2}{a^2+2}\right)$.

d) $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OK} = -\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}$
$= -d\,\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OK} = (1-d)\,\overrightarrow{OK}$ 0,25

$\boxed{\overrightarrow{HK} = \frac{a^2-a+2}{a^2+2}\,\overrightarrow{OK}}$ 0,25

$HK = \frac{a^2-a+2}{a^2+2}\,OK = \frac{a^2-a+2}{a^2+2}\times\sqrt{2+a^2}$

donc $\boxed{HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}}$ 0,5

3° Volume de DLMK

$V = \frac{1}{3}\,\mathcal{B}\times h = \frac{1}{3}\times\mathcal{A}(DML)\times HK$

$= \frac{1}{3}\times\frac{a}{2}\sqrt{2+a^2}\times\frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$

$\boxed{V = \frac{1}{6}\,a(a^2-a+2)\ \text{u.v}}$

0,5

BAC BLANC 2005

CORRIGE SUJET MATHS Série C

Barème

EXERCICE 1

$M(z)$, $M'(z')$ $f(M)=M'$ avec $z'=(-\sqrt{3}+i)z$.

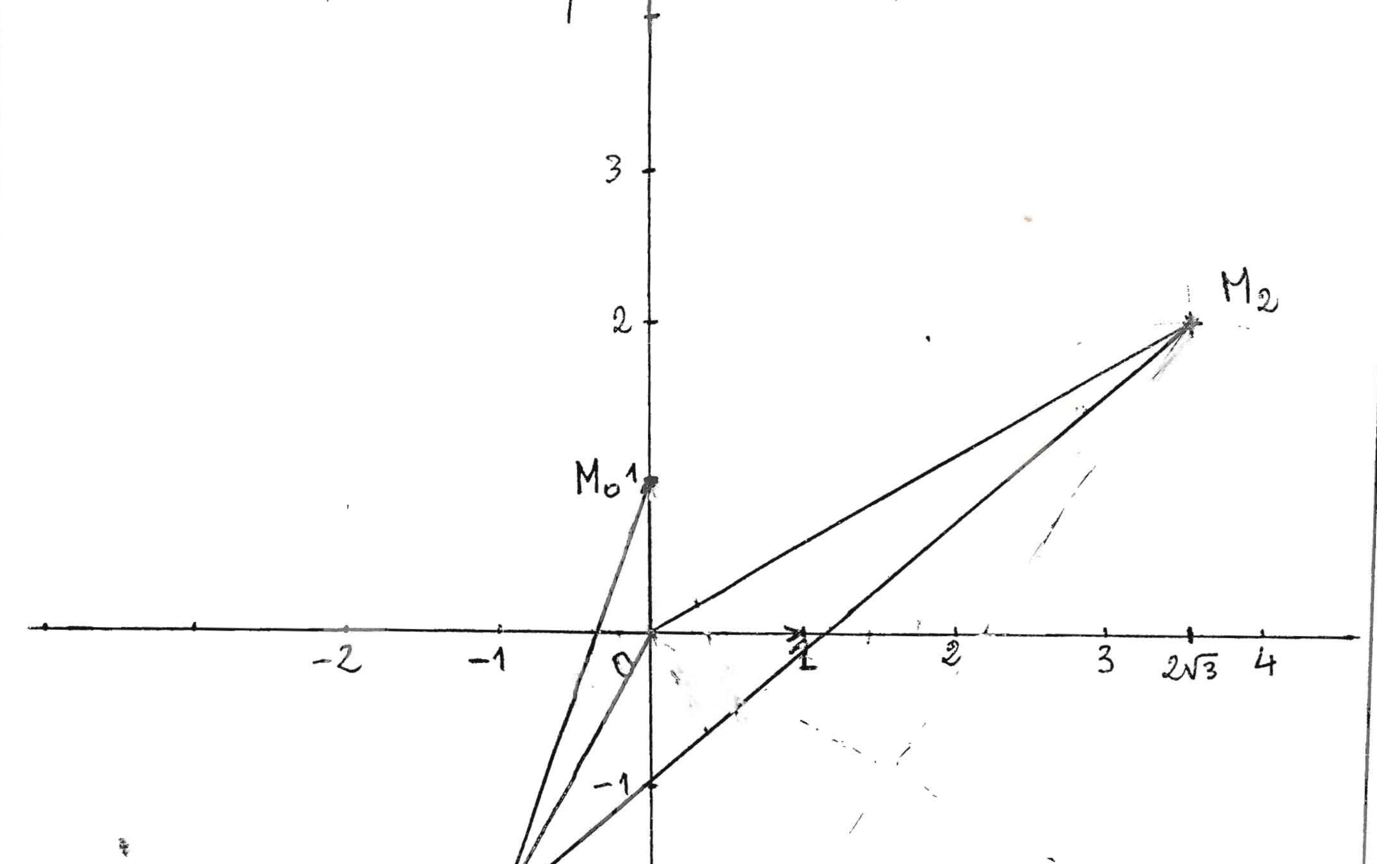
$(M_n)_n \mid M_0\left(z_0=e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$, $f(M_n)=M_{n+1}$. $M_n(z_n)$.

1- Nature et éléments caractéristiques de f.

L'écriture complexe de f est de la forme $z'=az+b$ avec $a=-\sqrt{3}+i$ et $b=0$

f est la similitude directe plane de centre O, de rapport $k=|-\sqrt{3}+i|=2$ et d'angle $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 0,75

- Plaçons les points $M_0(i)$, $M_1(-1-i\sqrt{3})$; $M_2(2\sqrt{3}+2i)$



0,75

- Justifions que OM_0M_1 et OM_1M_2 sont semblables:

utilisation de f: $O \longmapsto O$; $M_0 \longmapsto M_1$ $M_1 \longmapsto M_2$ d'où

$\frac{OM_1}{OM_0}=\frac{OM_2}{OM_1}=\frac{M_1M_2}{M_0M_1}=2$ (rapport de f) d'où le résultat 0,50

4- Soit $k \in \mathbb{Z}$. (E_k): $12x - 5y = k$.

a. Les nombres 12 et 5 sont premiers entre eux : donc d'après Besout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que. $12u + 5v = 1$. Donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $12(ku) + 5(kv) = k$. En posant $x = ku$ et $y = -kv$ on obtient une solution de (E_k). 0,50

Méthode permettant de trouver une solution particulière

Algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD.

n	12	5
div	5	2
quot.	2	2
reste	2	1

$12 = 5 \times 2 + 2$ et $5 = 2 \times 2 + 1$

$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2(12 - 5 \times 2)$

$= 5 - 2 \times 12 + 4 \times 5 = 5 \times 5 - 2 \times 12$

$-2(12) + 5(5) = 1$

En multipliant par k on a : $12(-2k) - 5(5k) = k$.

D'où une solution particulière est $(-2k ; -5k)$. 0,25

b. Résolution de (E_3) : $12x - 5y = 3$

Ici $k = 3$ d'où une solution particulière est $(-6 ; -15)$; $12(-6) - 5(-15) = -72 + 75 = 3$ donc $(-6 ; -15)$ est aussi une solution particulière.

$12x - 5y = 3 = 12(-6) - 5(-15) \Leftrightarrow 12(x+6) = 5(y+15)$ 0,75

$5 \mid 12(x+6)$ et $(5, 12) = 1$ donc $5 \mid x+6$ donc $x + 6 = 5q, q \in \mathbb{Z}$

$x = 5q - 6 ; q \in \mathbb{Z}$. et $y = 12q - 15$

$S = \{(5q-6 ; 12q-15) \; q \in \mathbb{Z}\}$

c. $M_n \in [Ox) \Leftrightarrow z_n \in [0 ; +\infty[\Leftrightarrow z_n = 0$ ou $\arg z_n = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow z_n = 0$ ou $\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} = 2k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} z_n = 0 \\ 12k - 5n = 3. \end{cases}$

$\Leftrightarrow z_n = 0$ ou $n = 12q - 15$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

Or $z_n = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$M_n \in [Ox) \Leftrightarrow M = O$ ou $n = 12q - 15$; $q \in \{2 ; 3, ...\}$ 0,50

Conclusion

$M_0 \neq 0$, alors $M_n \in [Ox) \Leftrightarrow n = 12q - 15$, $q \in \{2; 3; \dots\}$

EXERCICE 2

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, $\alpha \in]+\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = \sin\alpha$.

1- Montrons que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de (P).

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont non nuls.
- Soit $\theta = (\widehat{\vec{i}, \vec{j}})$. $\vec{i}\cdot\vec{j} = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\cos\theta = \cos\theta = \sin\alpha$

Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étaient colinéaires, alors $\cos\theta = 1$ ou $\cos\theta = -1$ donc $\sin\alpha = 1$ ou $\sin\alpha = -1$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \notin \{\frac{3\pi}{2}\}$ donc $\sin\alpha \neq -1$ et $\sin\alpha \neq 1$

donc $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires. | 0,50

Conclusion. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de (P)

2- $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si et seulement si

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$ (car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$)

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[\\ \alpha = \pi\end{cases}$

$((O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé $) \Longleftrightarrow (\alpha = \pi)$ | 0,50

3- $(O; \vec{i}, \vec{j})$ supposé orthonormé.

$f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ (C) courbe de f dans (P)

a.- Variations de f.

$D_f = \mathbb{R}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\ln 2 . 2^x(2^x+1) - \ln 2 . 2^x(2^x-1)}{(2^x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2\ln 2 . 2^x}{(2^x+1)^2}$. | 0,50

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. | 0,25

- Montrons que O est un point d'inflexion pour (C)

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f''(x) = \frac{2(\ln 2)^2 \cdot 2^x (2^x+1)^2 - 2\ln 2 \cdot 2^x \cdot 2\ln 2 \cdot 2^x (2^x+1)}{(2^x+1)^4}$$

$$= \frac{2(\ln 2)^2 \cdot (2^x+1) 2^x \left((2^x+1) - 2 \cdot 2^x\right)}{(2^x+1)^4} = \frac{2(\ln 2)^2 \cdot 2^x (1-2^x)}{(2^x+1)^3}$$ 0,50

d'où $f''(x)$ s'annule en 0 et change de signe.

Le point $O(0,0)$ est donc un point d'inflexion de (C) 0,25

---

b. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x\ln 2}-1}{e^{x\ln 2}+1} = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x\ln 2}-1}{e^{x\ln 2}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-x\ln 2}}{1+e^{-x\ln 2}} = 1$ 0,50

d'où f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]-1 ; 1[$.

4- h restriction de f à $[0;1]$. D domaine limité par (C_h), les droites d'équations $x=0$; $x=1$, $y=0$

V_D le volume de la portion engendrée par la rotation

- La section du solide engendré par un plan perpendiculaire à (Ox) est un disque de rayon $f(x)$

$$V_D = \int_0^1 \pi [f(x)]^2 dx \ (U.V). = \pi \int_0^1 \frac{(2^x-1)^2}{(2^x+1)^2} dx \ (U.V)$$ 0,50

$$= \pi \int_0^1 \frac{(2^x+1)^2 - 4 \cdot 2^x}{(2^x+1)^2} dx = \pi \int_0^1 \left(1 - 4\frac{2^x}{(2^x+1)^2}\right) dx \ .U.V.$$

$$= \pi \left[x + \frac{4}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2^x+1}\right]_0^1 U.V = \pi \left(1 - \frac{2}{3\ln 2}\right) U.V.$$

$$V_D = \frac{\pi(3\ln 2 - 2)}{3\ln 2} \ . U.V$$ 0,50

PROBLEME

PARTIE A

$f(x) = e^{-x^2}$

1- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre et on a :

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$; $f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2}$; $f^{(3)}(x) = (8x+4x-8x^3)e^{-x^2}$ 0,25

$f^{(3)}(x) = 4x(3-2x^2)\,e^{-x^2}$.

2- Variations de f''.

le signe de $f^{(3)}$ est celui de $4x(3-2x^2)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-2x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

0,25

f'' est croissante sur $\left]-\infty ; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ et sur $\left[0 ; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

f'' est décroissante sur $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}} ; 0\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}} ; +\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f''(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\right) = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

~~0,25~~

Tableau de Variation de f''

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f^{(3)}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e\sqrt{e}}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{4}{e\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

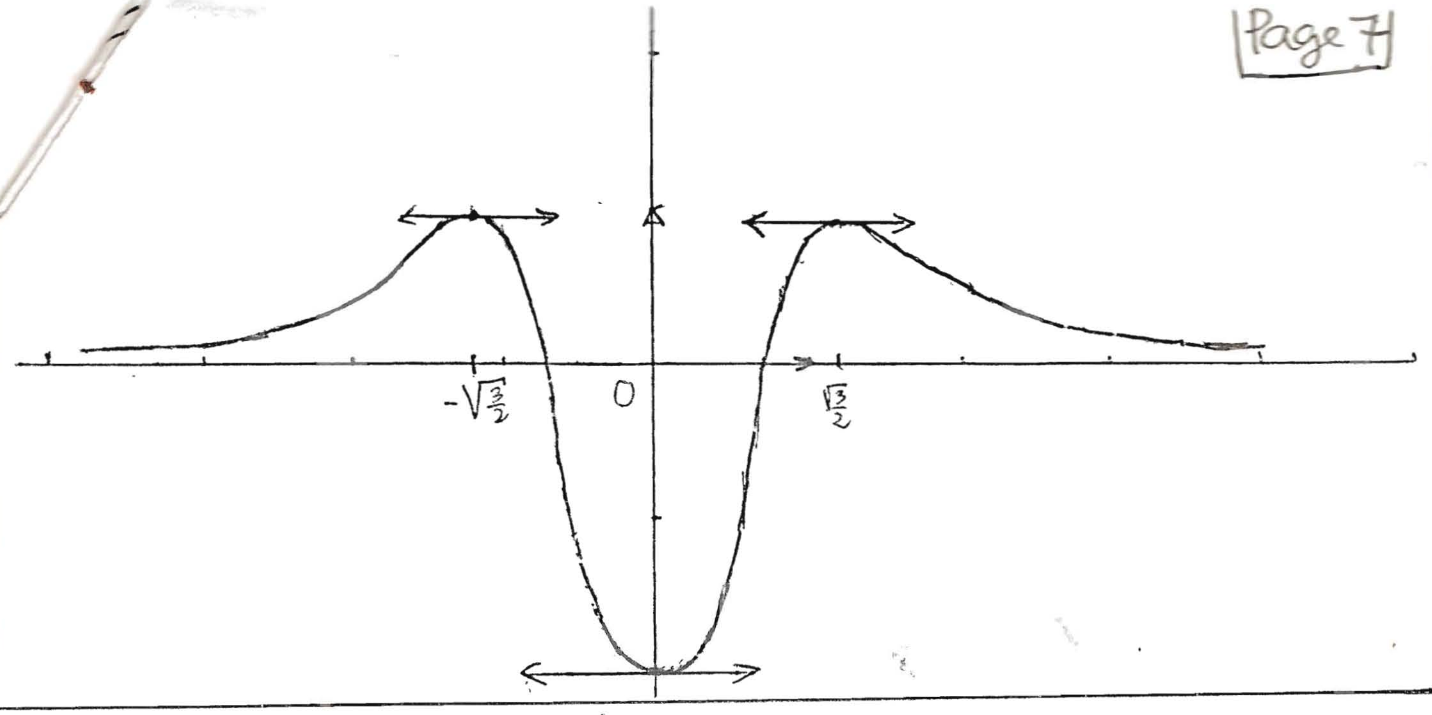
$\frac{4}{e\sqrt{e}} \simeq 0{,}89$

Voir graphique Page 7

0,25

3- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{4}{e\sqrt{e}} \leq |f''(x)| \leq 2$ d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|f''(x)| \leq 2$ 0,25



0,50

PARTIE B $\quad I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

B1 $\quad u(x) = \alpha x + \beta$, $g(x) = (f \circ u)(x)$; $\phi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$ $\quad x \in \mathbb{R}_+$

1- Soit G une primitive de g. On a :

$\phi(x) = [G(t)]_{-x}^{x} - 2xg(0) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$ 0,50

2- G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables. Donc ϕ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$\phi'(x) = g(x) + g(-x) - 2g(0)$ et $\phi''(x) = g'(x) - g'(-x)$ 0,50

3- a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(\alpha x + \beta)$; $g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)$

et $g''(x) = \alpha^2 f''(\alpha x + \beta)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha x + \beta \in \mathbb{R}$ donc $|f''(\alpha x + \beta)| \leq 2$. 0,50

d'où $|g''(x)| \leq 2\alpha^2$.

b. On a : $|\phi^{(3)}(x)| = |g''(x) + g''(-x)| \leq |g''(x)| + |g''(-x)| \leq 4\alpha^2$ 0,25

Donc d'après les IAF appliqués à x et 0 avec $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $-4\alpha^2(x-0) \leq \phi''(x) - \phi''(0) \leq 4\alpha^2(x-0)$ 0,50

Soit $-4\alpha^2 x \leq \phi''(x) \leq 4\alpha^2 x$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, |\phi''(x)| \leq 4\alpha^2 x$

C. Intégrons successivement l'inégalité : $-4\alpha^2 x \leq \phi''(x) \leq 4\alpha^2 x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x -4\alpha^2 t\,dt \leq [\phi'(t)]_0^x \leq 4\alpha^2 \int_0^x t\,dt.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, -2\alpha^2 x^2 \leq \phi'(x) - \phi'(0) \leq 2\alpha^2 x^2$

$\phi'(0) = g(0) + g(0) - 2g(0) = 0$ donc

$-2\alpha^2 x^2 \leq \phi'(x) \leq 2\alpha^2 x^2$ 0,25

$\int_0^x -2\alpha^2 t^2 dt \leq \int_0^x \phi'(t)\,dt \leq \int_0^x 2\alpha^2 t^2 dt$

$-\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \leq \phi(x) - \phi(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2 x^3$

Or $\phi(0) = 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \leq \phi(x) \leq \frac{2}{3}\alpha^2 x^3$ 0,50

d. Encadrement de $\phi(1)$. On a : $-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \phi(1) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$

<u>Déduction:</u> $-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{1} g(t)\,dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$ 0,50

<u>B2</u>

1- Démontrons que $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)\,du.$

$u = \alpha x + \beta$, $du = \alpha\,dx.$ donc $dx = \frac{1}{\alpha}du.$

si $x = -1$, $u = \beta - \alpha$ et si $x = 1$, $u = \beta + \alpha$. d'où

$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)\,du.$ 0,50

2- On se place dans le cas : $\alpha = \frac{1}{2n}$, $\beta = \frac{2k+1}{2n}$

avec $k \in \{0; 1; \dots, n-1\}$.

$\beta - \alpha = \frac{k}{n}$, $\beta + \alpha = \frac{k+1}{n}$

$\int_{-1}^{+1} g(t)\,dt = 2n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du$ or d'après B_1d., 0,25

$$-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{+1} g(t)\,dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4n^2} \leq 2n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - 2f(\beta) \leq \frac{2}{3}\,\frac{1}{4n^2}$$

$$-\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - \frac{1}{n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$$

d'où $\forall k \in \{0; 1; 2; \dots, n-1\}$, $-\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - \frac{1}{n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$ 0,75

3- Déduction :

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{12n^3} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)\,du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{12n^3}$$

$$-\frac{1}{12n^2} \leq \int_0^1 f(u)\,du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq \frac{1}{12n^2}$$ 0,25

car $\sum_{k=0}^{n-1} +\frac{1}{12n^3} = \frac{+n}{12n^3} = +\frac{1}{12n^2}$

d'où $\left|\int_0^1 f(u)\,du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right| \leq \frac{1}{12n^2}$ 0,75

---

4 - Détermination du plus petit entier n.

Il suffit que $\frac{1}{12n^2} \leq 10^{-2}$ soit $n^2 \geqslant \frac{100}{12}$ donc $n \geqslant \frac{5\sqrt{3}}{3}$. $\left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \simeq 2,886\right)$. d'où on prend $n = 3$. 0,25

Valeur approchée de I

$$I \simeq \frac{1}{3}\left(f\left(\tfrac{1}{6}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{5}{6}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(e^{-\frac{1}{36}} + e^{-\frac{1}{4}} + e^{-\frac{25}{36}}\right)$$ 0,75

$$\simeq \frac{1}{3}(0,9726044 + 0,7788007 + 0,4993517) \simeq 0,750025$$

d'où $I \simeq 0,75$ à 10^{-2} près.

PARTIE C

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1- f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc F est définie et est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$. 0,25

2- Parité de F.

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}, F(-x) = \int_0^{(-x)} f(t)dt = \int_0^x f(u)(-du)$

Or $f(-u) = f(u)$ d'où $F(-x) = -\int_0^x f(u)du$. d'où

F est impaire. 0,2

3- Variations de : F.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ d'où F est strictement 0,25

croissante sur $\mathbb{R}$.

4- a. $\forall t \geq 1, \; t^2 - t = t(t-1) \geq 0$ donc $t^2 \geq t$.

Par suite :

$t^2 \geq t \Leftrightarrow -t^2 \leq -t \Leftrightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t}$. 0,25

b. $(U_n)_n, \; U_n = F(n) = \int_0^n f(t)dt$.

$U_{n+1} - U_n = \int_0^{n+1} f(t)dt - \int_0^n f(t)dt = \int_n^0 f(t)dt + \int_0^{n+1} f(t)dt$

$= \int_n^{n+1} f(t)dt$.

Or $f(t) > 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$ d'où $U_{n+1} - U_n > 0$. 0,25

La suite (U_n) est strictement croissante.

Montrons que (U_n) est majorée par $I + \frac{1}{e}$.

$U_n = \int_0^n f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^n f(t)dt$.

Or, d'après 4.a., $\int_1^n f(t)dt \leq \int_1^n e^{-t}dt$ et

$\int_1^n e^{-t}dt = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{e}$. 0,25

d'où $U_n \leq I + \frac{1}{e}$

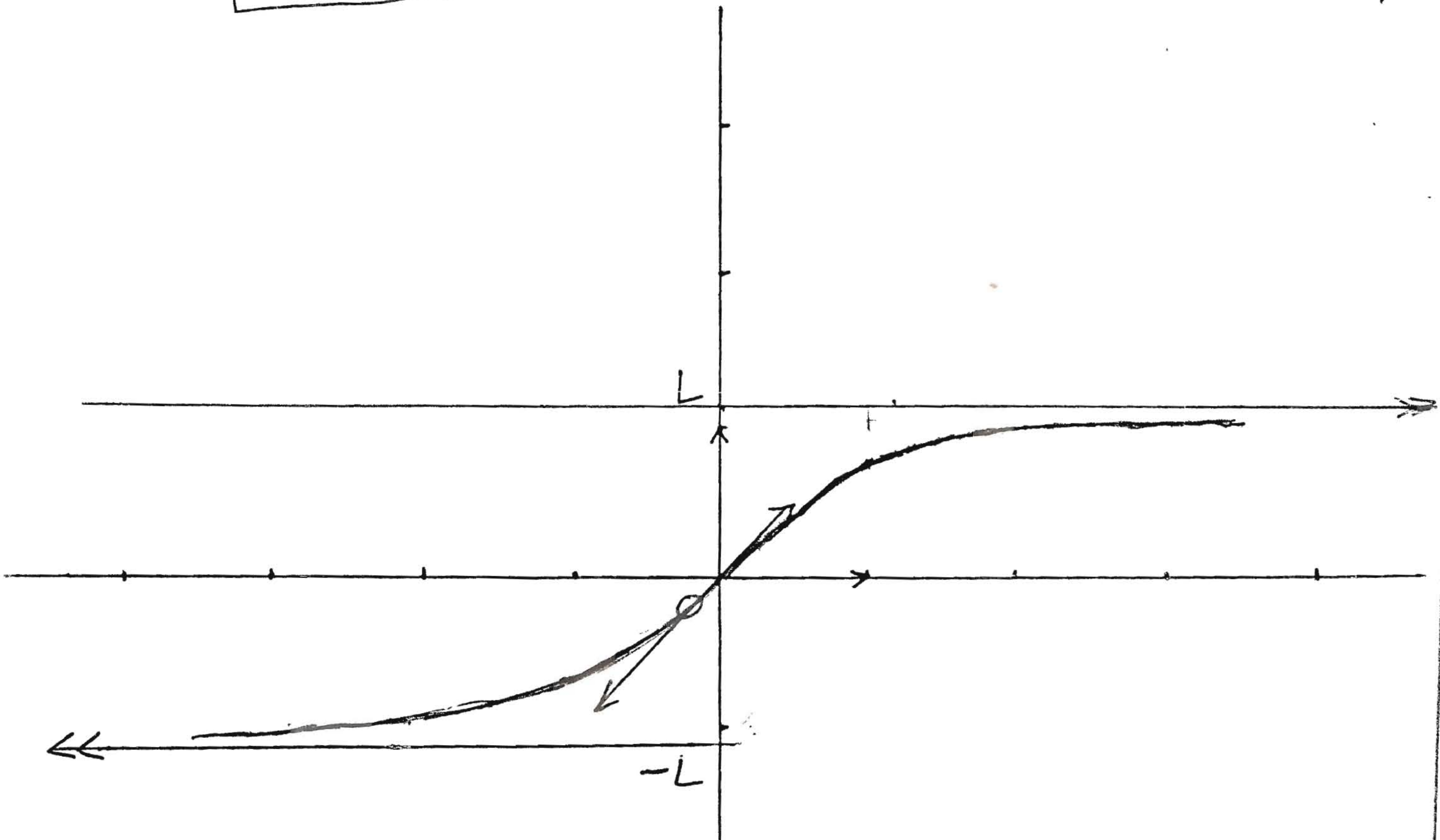
c. $(U_n)_n$ étant croissant et majorée, alors u_n est une suite convergente. Comme $U_n \le I + \frac{1}{e}$ alors $L \le I + \frac{1}{e}$ avec $L = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. 0,25

d. La fonction F a la même limite finie L que (U_n) lorsque x tend vers $+\infty$. 0,25

5- Tableau de variation de F

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	1	$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	L

avec $L \le I + \frac{1}{e} \simeq 1,11$



0,50