EXERCICE I

Dans une urne il a n-1 boules blanches, n boules vertes, n+1 boules rouges. n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3.

I- . On tire trois boules simultanément de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.

Calculer l'espérance mathématique de X, notée E(X), et vérifier qu'elle est indépendante de n.

II-. On suppose désormais que $n = 4$.

Un premier tirage simultanée de 3 boules ayant été effectué, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on tire une deuxième fois trois boules simultanément. On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3 et B les événements suivants :

A_0 : le premier tirage ne contient pas de boule verte.

A_1 : le premier tirage contient exactement une boule verte.

A_2 : le premier tirage contient exactement deux boules vertes.

A_3 : le premier tirage contient exactement trois boules vertes.

B : le deuxième tirage contient exactement deux boules vertes.

1°) Calculer les probabilités des événements A_0, A_1, A_2, A_3.

2°) Calculer $p(B/A_0)$, $p(B/A_1)$, $p(B/A_2)$, $p(B/A_3)$.

Remarque : $p(B/A_i)$ désigne la probabilité de B sachant que A_i est réalisé, avec i élément de $\{0, 1, 2, 3\}$.

3°) En déduire les probabilités des événements $B \cap A_0$, $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, $B \cap A_3$.

4°) Calculer la probabilité de l'événement B.

EXERCICE II

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents.

N.B. Dans toutes les questions, les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

1°) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité de chaque tirage.

a) Calculer la probabilité de l'événement A « tirer 2 chaussures de la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'événement B « tirer un pied gauche et un pied droit ».

c) Montrer que la probabilité de l'événement C « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\frac{1}{19}$.

2°) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire, successivement et sans remise, une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3 et 4.

b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

EXERCICE III.

On considère un dé cubique dont 4 faces sont blanches et deux sont noires. L'expérience consiste à lancer ce dé et à noter la couleur de sa face supérieure.

1°) Calculer la probabilité d'avoir :

a) Une face blanche.

b) Une face noire.

2°) On jette le dé quatre fois de suite.

a) Calculer la probabilité d'avoir dans l'ordre : une face blanche ; une face noire ; une face blanche ; une face blanche.

b) Calculer la probabilité d'avoir une seule face noire au cours des quatre lancers.

c) Calculer la probabilité d'avoir une face noire au $4^{ème}$ lancer (une face noire pouvant apparaître au cours des autres lancers).

3°) Soit n un entier naturel non nul.

a) Calculer la probabilité p_n d'avoir au moins une face blanche au cours des n lancers.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $p_n \geq 0{,}99$.

EXERCICE 4

1°) A et B sont deux points distincts du plan orienté tels que AB = 6 (unité 1 cm).

Déterminer et construire :

E_1 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$

E_2 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

E_3 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

E_4 ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On représentera ces ensembles avec des couleurs différentes sur le même graphique.

2°) Dans une urne, il y a quatre jetons sur chacun desquels est inscrit le nom d'un ensemble du 1°; tous les jetons portent des noms différents.

On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne; on note à chaque tirage le nom de l'ensemble inscrit sur le jeton tiré. Tous les tirages sont supposés équiprobables.

On appelle X la variable aléatoire associée à l'expérience ci-dessus et qui prend la valeur :

- 3 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont égaux.
- 2 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont symétriques par rapport à (AB)
- 1 si les ensembles inscrits sur les jetons tirés sont différents et tels que l'un soit contenu dans l'autre
- m dans les autres cas.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer le réel m pour que l'espérance mathématique de X soit nulle.

EXERCICE 5

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 2n. On y trouve :

1 boule portant le numéro 1

2 boules portant le numéro 2

2^2 boules portant le numéro 3

2^3 boules portant le numéro 4

etc, et enfin :

2^{2n-1} boules portant le numéro 2n.

Partie 1- .

1°) On appelle N le nombre de boules contenues dans l'urne, montrer que $N = 4^n - 1$ et que c'est un multiple de 3.

2°) On désigne par I le nombre de boules portant un numéro impair, et par P le nombre de boules portant un muméro pair.

a) Montrer que $I = \frac{4^n - 1}{3}$

b) Exprimer alors I en fonction de N et montrer que $P = 2I = \frac{2N}{3}$

Partie 2-.

On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne et on désigne par X le nombre de boules tirées portant un numéro pair.

1°) Donner en fonction de N, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2°) Calculer son espérance mathématique et vérifier qu'elle ne dépend pas de N.

Partie 3-.

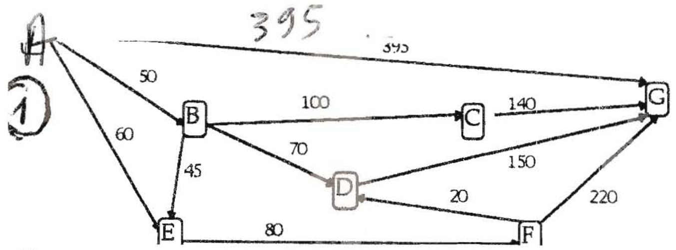
On suppose maintenant que $100 \leq I \leq 1000$.

1°) Quel est le plus grand numéro porté par les boules.

2°) On tire une boule au hasard. Calculer la probabilité pour que cette boule porte un numéro supérieur ou égal à 8.

395

1



Un voyageur veut se rendre de la ville A (départ) à la ville G (arrivée). Le schéma ci-dessus donne les divers chemins possibles, à sens unique, avec la distance en kilomètres correspondante du parcours entre deux villes, et sens de parcours.

Exemple (A, B, C, G) est un itinéaire possible.

1°) a) Combien y a-t-il d'itinéaires possibles ?

b) Ranger les du plus court au plus long, en précisant chaque fois la distance correspondante.

c) Soit X l'événement « le voyageur choisit le trajet le plus court », Y l'événement « le voyageur choisit le trajet le plus long », Z lo'événement « le voyageur ne choisit ni le plus court, ni le plus long »

On suppose qu'un voyageur choisit son chemin de façon équiprobable.

Calculer les probabilités des événements X, Y, Z que l'on notera p(X), p(Y), p(Z).

2°) a) Sachant que la probabilité de faire un accident est de 0,2 sur le trajet le plus court, 0,02 sur le trajet le plus long, de 0,1 sur le trajet intermédiaire, calculer sous forme d'une fraction irréductible, pour un voyageur quittant la ville A, la probabilité d'arriver sans accident à la ville G.

b) Le voyageur est arrivé sans accident à destination. Montrer que la probabilité que ce voyageur ait choisi le tyrajet le plus court est $\frac{20}{159}$.

3°) On suppose que 7 voyageurs sont partis de A et sont arrivés sans accident à destination.

a) Quelle est la probabilité à 10-4 près, pour que 4 voyageurs aient choisi le trajet le plus court.

b) Quelle est la probabilité à 10-4 près, pour qu'au moins un voyageur aient choisi le trajet le plus ~~long~~. Court

2 Une urne contient six boules indiscernables au toucher : quatre boules vertes et deux boules jaunes.

a) On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules vertes tirées.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance.

b) On tire au hasard, deux fois de suite, deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne.
On note A, B, C, D les événements suivants :

A : aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules.
B : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules.
C : deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de deux boules.
D : une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de deux boules.

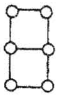
— Calculer :

P(D/A) (probabilité conditionnelle de D sachant que A est réalisé)
P(D/B) (probabilité conditionnelle de D sachant que B est réalisé)
P(D/C) (probabilité conditionnelle de D sachant que C est réalisé).

— En déduire les probabilités des événements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$.

— Calculer la probabilité de l'événement D.

3 Un caractère de l'écriture Braille destinée aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille ci-dessous :

Grille Braille 

Exemple : caractère Braille représentant la lettre N. 

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1° a) Combien de caractères Braille peut-on concevoir ?
On note B l'ensemble de ces caractères.

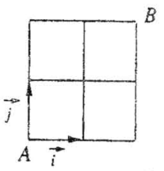
b) Dénombrer les caractères Braille formés de quatre points.

2° Dans B, on tire au sort un caractère, les tirages étant supposés équiprobables.

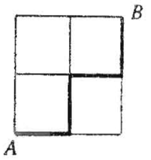
a) Quelle est la probabilité de tirer un caractère représentant une lettre de l'alphabet ?

b) Ayant tiré un caractère composé de quatre points (représentant une lettre ou non), quelle est la probabilité pour que ces quatre points soient les sommets d'un carré ...

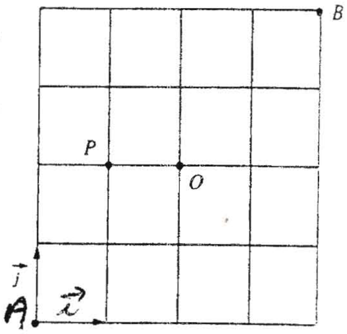
4 1° On dispose d'un quadrillage « 2 × 2 » rapporté au repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ comme l'indique le schéma ci-contre.
B est le point de coordonnées (2, 2).
On appelle chemin minimal de A à B toute succession de quatres vecteurs $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ dont la somme est $\overrightarrow{AB}$.



Par exemple, la succession $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{j})$, matérialisée sur le schéma ci-contre, est un chemin minimal de A à B.
Dessiner tous les chemins minimaux de A à B possibles. Comment pouvait-on prévoir leur nombre ?



2° On dispose maintenant d'un quadrillage « 4 × 4 ».
B est le point de coordonnées (4, 4).
Un chemin minimal de A à B est une succession de huit vecteurs $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ dont la somme est $\overrightarrow{AB}$. On choisit un chemin minimal au hasard.
Quelle est la probabilité pour que ce chemin
a) passe par le point O, centre du quadrillage ?
b) passe par le point P de coordonnées (1, 2) ?



5 Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines.
Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :
— qu'il doit intervenir la première semaine ;
— que s'il est intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à 3/4 ;
— que s'il n'est pas intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à 1/10.
On désigne par E_n l'événement : « le technicien intervient la n-ième semaine » et par p_n la probabilité de cet événement E_n.

a) Déterminer les nombres $p(E_1)$, $p(E_{n+1}/E_n)$ et $P(E_{n+1}/\overline{E}_n)$;
puis en fonction de p_n : $p(E_{n+1} \cap E_n)$ et $p(E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$.

b) En déduire que pour tout entier n non nul : $p_{n+1} = \frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10}$.

c) On pose : $q_n = p_n - \frac{2}{7}$.
Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique.
En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
Pour quelles valeurs de l'entier n, la probabilité que le technicien intervienne la n-ième semaine, est-elle inférieure à 3/10 ?

6 Dans un jeu télévisé, le candidat doit répondre à vingt questions.
Pour chacune des questions, l'animateur propose au candidat trois réponses possibles, une seule étant la réponse exacte. Les questionnaires sont établis de façon que l'on puisse admettre que :

• Un candidat retenu pour participer au jeu connaît la réponse exacte pour 60 % des questions et donne une réponse au hasard pour les autres.

• Les questions posées lors du jeu sont deux à deux indépendantes.

a) Soit les événements :
H : « le candidat choisit au hasard la réponse à la première question » ;
E : « le candidat donne la réponse exacte à la première question ».
Calculer les probabilités $p(H)$, $p(\overline{H})$ puis p (E et $\overline{H}$).
Sachant qu'un candidat répond au hasard à la première question, quelle est la probabilité pour qu'il donne la réponse exacte ?
En déduire p (E et H), puis p (E).
N.B. On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b) On considère un candidat pris au hasard et on note X la variable aléatoire « nombre de réponses exactes données par le candidat aux 20 questions du jeu ».
Donner la loi de probabilité de X.
Quel est le nombre moyen de bonnes réponses données par un candidat pris au hasard ?
Donner une valeur décimale approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un candidat pris au hasard donne 20 réponses exactes.