REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2004-1. MATHEMATIQUES
Série : A1
Durée : 3 heures
Coefficient : 4

EXERCICE 1 (4 points)

On considère la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$ définie par : $u_n = 36 \times 10^{-n}$.

1. a) Calculer u_0, u_1 et u_2. **0,75**

b) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; en déduire la nature de la suite (u_n) puis préciser son premier terme et sa raison. **0, 5** **0,5**

2. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Calculer S_n en fonction de n. **0,75**

b) En déduire S_1, S_2, S_3 et S_4 (les résultats seront donnés sous forme décimale exacte). **1**

c) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$. **0,5**

EXERCICE 2 (6 points)

La série (S) ci-dessous donne le poids y en kg d'un nourrisson, x jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,60	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

A. 1. a) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points M(x_i ;y_i) associé à la série (S) puis placer G sur le graphique donné en annexe. **0,5** **0,25**

b) La forme de ce nuage permet-elle un ajustement linéaire ? **0,25**

2. On se propose d'ajuster cette série par la méthode de MAYER.

On considère les deux séries (S_1) et (S_2) tirées de la série (S).

(S_1)

x_i	5	7	10	14
y_i	3,60	3,70	3,75	3,85

(S_2)

x_i	18	22	26
y_i	3,90	4,05	4;12

a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des nuages associés aux séries respectives (S_1) et (S_2) puis placer G_1 et G_2 sur le graphique en annexe. **1** **0,25**

b) Montrer qu'une équation de la droite (G_1G_2) est : $y = 0,023x + 3,518$. **0,5**

c) Vérifier par calcul que le point G appartient à la droite (G_1G_2) puis tracer (G_1G_2). **0,5**

B. On se propose d'ajuster la série (S) par la méthode des moindres carrés.

1. Justifier cet ajustement en calculant le coefficient de corrélation linéaire **r** sachant que : **1,25**

$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 1854$; $\sum_{i=1}^{7} y_i^2 = 104,122$, $\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 401,72$ (donner le résultat à 10^{-3} près).

(On rappelle que $V(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \bar{x}^2$; $V(y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \bar{y}^2$ et $COV(x,y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}$**)**

2. a) Montrer qu'une équation de la droite (D) de régression de y en x est $y = 0,024x + 3,507$. **0,5**

b) Tracer (D) sur le graphique en annexe. **0,25**

C. 1. Si l'évolution du poids en fonction du nombre de jours se poursuit dans les mêmes conditions, donner une estimation à 10^{-2} près du poids de ce nourrisson 30 jours après sa naissance :

a) en utilisant la méthode de MAYER ; **0,25**

b) en utilisant la méthode des moindres carrés. **0,25**

2. Le poids réel de cet enfant 30 jours après sa naissance est de 4,25 kg. Parmi les deux méthodes, quelle est celle qui fournit la meilleure estimation ? **0,25**

PROBLEME (10 points)

Partie A

2,5

On considère la fonction polynôme P telle que $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

1. Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs du réel x. **0,5**

2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 4x + 3}$.

a) Quel est l'ensemble de définition D_g de g ? **0,25**

b) Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout x de D_g. **0,25**

c) Vérifier que pour tout $x \in D_g$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}$. **0,25**

3. a) Soit α un réel tel que $\alpha > -1$.

Calculer l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \left(\frac{2}{x^2 + 4x + 3}\right)dx$ et montrer que $I(\alpha) = \ln\left[\dfrac{3(\alpha + 1)}{\alpha + 3}\right]$. **1**

b) Déterminer la valeur exacte de α telle que $I(\alpha) = 1$. **0,25**

Partie B

6

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unités graphiques : 1 cm sur $(O, \vec{i})$ et $10\,cm$ sur $(O, \vec{j})$.

1. Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = \ln\left(\dfrac{3x+3}{x+3}\right)$.

Déterminer l'ensemble de définition D_h de h. **0,5**

2. On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+3}{x+3}\right)$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Que représente la fonction f pour la fonction h ?. **0,25**

b) Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$. En déduire les équations des asymptotes éventuelles à $\mathscr{C}$. **1** **0,5**

c) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x > -1$, f' étant la dérivée de f. **0,5**

d) En déduire le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation. **1,25**

e) Montrer que $\mathscr{C}$ passe par le point O(0 ;0) puis donner une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en ce point. **0,5** + 25

f) Tracer (T), puis $\mathscr{C}$ et ses asymptotes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1, 5**

Partie C

1,5

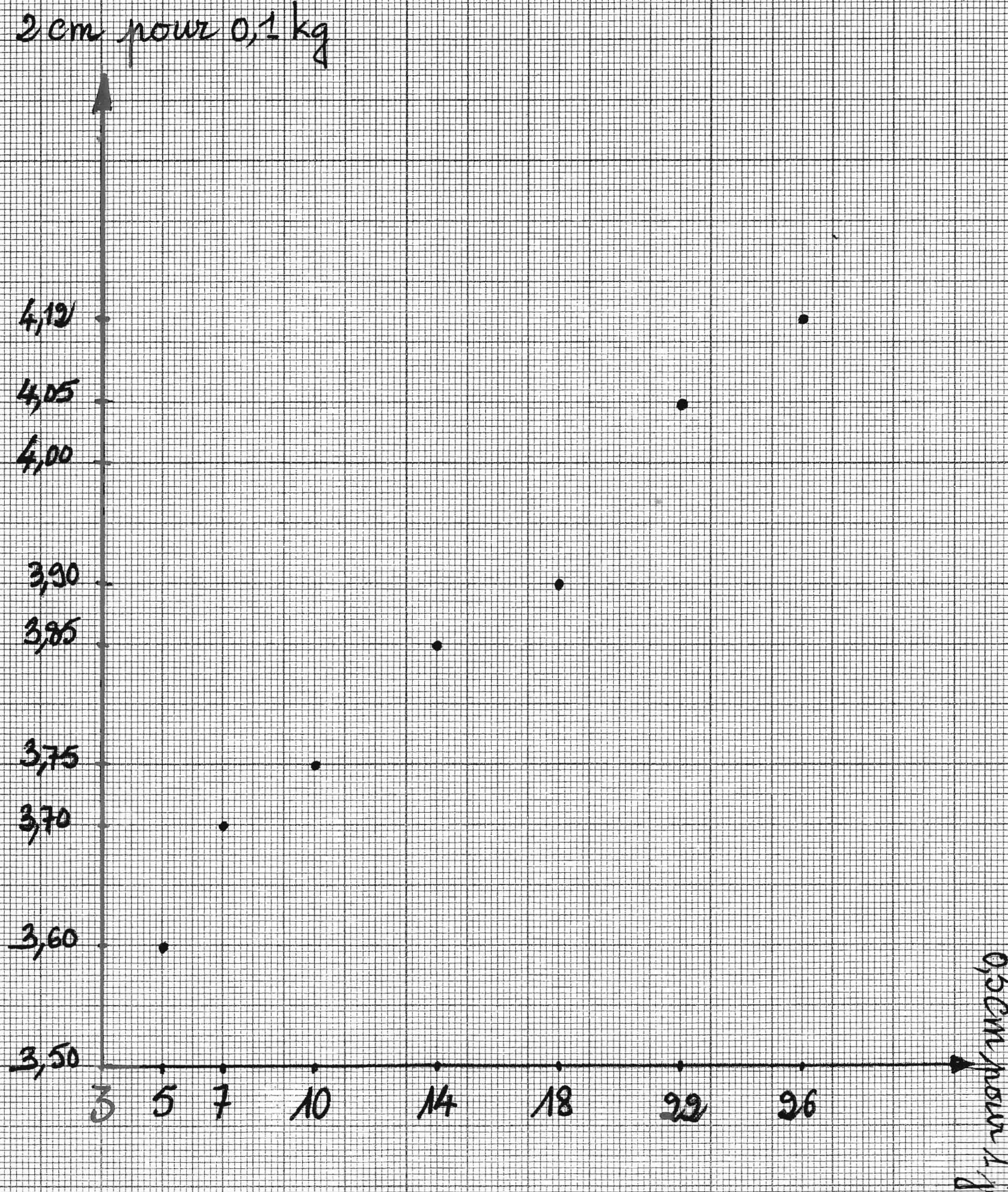
Soit la fonction F définie pour $x > -1$ par $F(x) = (x+1)\ln(3x+3) - (x+3)\ln(x+3)$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]-1; +\infty[$. **0,5**

2. Calculer en cm^2, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, ensemble des points M(x, y) qui vérifient $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$. **1**

Document annexe à compléter et à joindre à la copie.

N.B. Aucune mention, sauf les réponses aux questions, ne sera portée dessus.



REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2004-1. MATHEMATIQUES
Série : A1

CORRIGE et Barème

EXERCICE 1 (4 points)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n = 36\times 10^{-n}$.

1. a) $u_0 = 36;\ u_1 = 3,6;\ u_2 = 0,36.$ **(0,25 pt × 3)**

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{36\times 10^{-n-1}}{36.10^{-n}} = 10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0,1.$ **(0,25 pt)**

(u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 36$ et de raison 36. $^{-1}$ **(0,25 pt × 3)**

2) a)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-(0,1)^{n+1}}{1-0,1}$$ **(0,5 pt)**

2. a)

$$S_n = 36\times\frac{1-(0,1)^{n+1}}{0,9} = 40\times\left[1-(0,1)^{n+1}\right]$$ **(0,25 pt)**

b) $S_1 = 39,6;\ S_2 = 39,96;\ S_3 = 39,996;\ S_4 = 39,9996.$ **(0,25 pt × 4)**

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 40.$ **(0,25 pt × 2)**

EXERCICE 2 (6 points)

A. 1) a) $G(\overline{x};\overline{y})$ avec $\overline{x} \simeq 14,571$ et $\overline{y} \simeq 3,853$. **(0,25 pt × 2)**

b) Nuage de forme bien allongée, donc ajustement linéaire (ou affine) possible. **(0,25 pt)**

2) a) $G_1(\overline{x}_1;\overline{y}_1)$ avec $\overline{x}_1 = 9$ et $\overline{y}_1 = 3,725$. **(0,25 pt × 2)**

$G_2(\overline{x}_2;\overline{y}_2)$ avec $\overline{x}_2 = 22$ et $\overline{y}_2 \simeq 4,023$. **(0,25 pt × 2)**

b) (G_1G_2) a une équation de la forme $y = ax + b$ avec

$a = \dfrac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1} \simeq 0.023$ et $b = \overline{y}_1 - a\overline{x}_1 \simeq 3,518$ d'où **(0,25 pt × 2)**

$(G_1G_2): y = 0,023x + 3,518.$

c) $0,023\times 14,571 \simeq 3;852 \Rightarrow G \in (G_1G_2).$ **(0,25 pt)**

Voir tracé au B.2)b).

B. 1) $r = \dfrac{COV(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} \simeq 0,99$ avec $V(x) \simeq 52,531$, $V(y) \simeq 0,03$ et **(0,25 pt × 3)**

$COV(x,y) \simeq 1,247.$ **(0,25 pt)**

La corrélation est très forte, d'où l'ajustement linéaire est justifié. **(0,25 pt)**

2) a) $(D): y = a'x + b'$ avec $a' = \dfrac{COV(x,y)}{V(x)} \simeq 0;024$ et $b' = \overline{y} - a'\overline{x} \simeq 3,507$

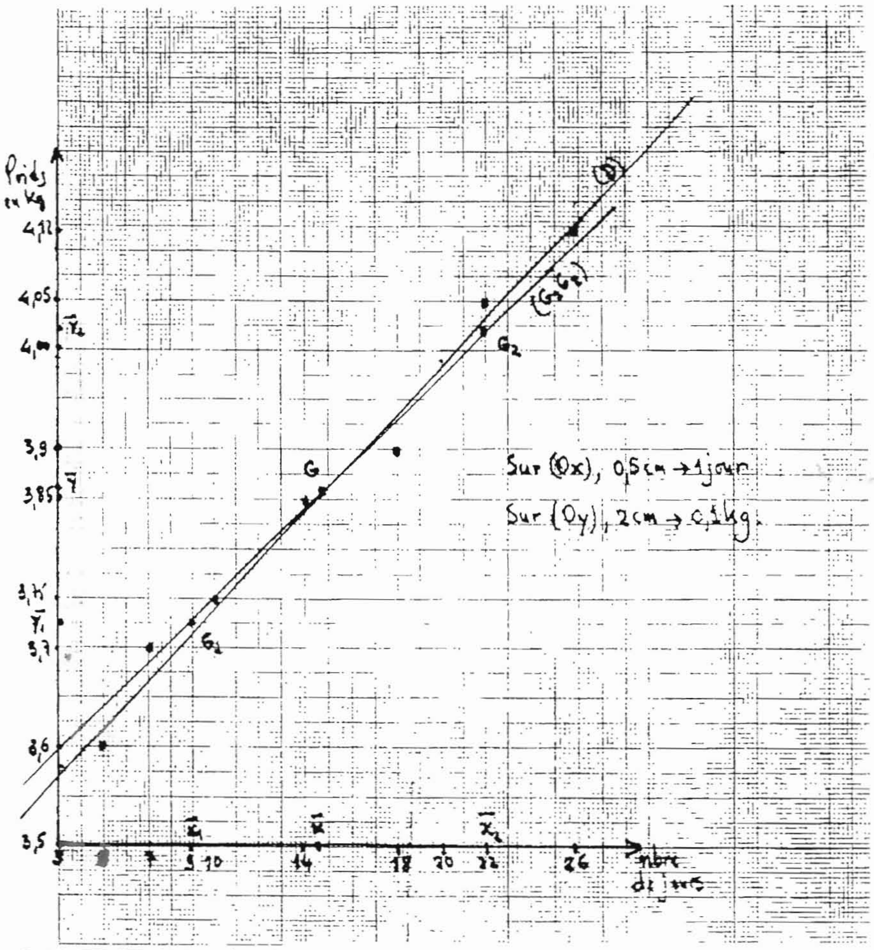
d'où $(D): y = 0,024x + 3,507$. **(0,5 pt)**

b) **Voir figure sur la page suivante**

C. 1) a) avec $x = 30$, on obtient $\hat{y} \simeq 0,023\times 30 + 3,518$ soit $\hat{y} \simeq 4,21$. **(0,25 pt)**

b) on obtient $\hat{y} \simeq 0,024\times 30 + 3,507$ soit $\hat{y} \simeq 4.23$. **(0,25 pt)**

2) L'estimation par la méthode des moindres carrés est plus proche du poids réel de l'enfant. **(0,25 pt)**



Point G (0,25 pt)
Points G_1 et G_2 (0,25 pt)
Droite (G_1G_2) (0.25 pt)
Droite (D) (0,25 pt)

PROBLEME (10 points)

PARTIE A

1. $P(x) = x^2 - 4x + 3$. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = -1$.

Le signe de $P(x)$ est donné par le tableau ci-dessous. **(0,5 pt)**

x	$-\infty$	-3		-1		$-\infty$
$P(x)$	+	0	-	0	-	

2. g est définie par $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 4x + 3}$.

a) $g(x) = \dfrac{2}{P(x)} \Rightarrow D_g = \{x \in \mathbb{R} / P(x) \neq 0\}$.

$D_g = \Re - \{-3; -1\}$ ou $D_g =]-\infty; -3[\cup]-3; -1[\cup]-1; +\infty[$ **(0,25 pt)**

b) Pour tout $x \in D_g$, $g(x)$ prend le signe de $P(x)$ (Voir tableau)

x	$-\infty$	-3		-1	$-\infty$
$g(x)$	$-$	‖	$-$	‖	$+$

(0,5 pt)

c) Pour $x \in D_g$, on a $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{(x+3) - (x+1)}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{2}{x^2 + 4x + 3} = g(x)$ (0,25 pt)

3. a) $\alpha > -1$. et $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} g(x)dx$.

Or $g(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-3}$ $\forall x \in D_g$, donc une **(0,25 pt)**

primitive de $g(x)$ sur $]-1; +\infty[$ est $\ln(x+1) - \ln(x+3)$.

Par conséquent,

$\mathrm{I}(\alpha) = [\ln(x+1) - \ln(x+3)]_0^{\alpha}$ **(0,25 pt)**

$= \ln(\alpha+1) - \ln(\alpha+3) + \ln 3$

$= \ln 3(\alpha+1) - \ln(\alpha+3)$ **(0,25 pt)**

$= \ln\left[\dfrac{3(\alpha+1)}{\alpha+3}\right]$ **(0,25 pt)**

b) $\mathrm{I}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \ln\left[\dfrac{3(\alpha+1)}{\alpha+3}\right] = \ln e \Leftrightarrow \dfrac{3\alpha+3}{\alpha+3} = e \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{3e-3}{3-e}$. **(0,5 pt)**

PARTIE B

1. h est définie par $h(x) = \ln\left(\dfrac{3x+3}{x+3}\right)$.

$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} / x+3 \neq 0 \; et \; \dfrac{3x+3}{x+3} > 0\right\}$.

x	$-\infty$ -3		-1 $+\infty$
$\dfrac{3x+3}{x+3}$	$+$	||	$-$ 0 $+$

(0.5 pt)

donc $D_h =]-\infty, -3[\cup]-1; +\infty[$.

2. a) f est **la restriction** de h sur l'intervalle $]-1; +\infty[$. **(0,25 pt)**

b) Limite de f en -1 :

On a $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (3x+3) = 0$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (x+3) = 2$, *donc* $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \left(\dfrac{3x+3}{x+3}\right) = 0$. **(0,25 pt)**

Or $\lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \ln\left(\dfrac{3x+3}{x+3}\right) = -\infty$. **(0,25 pt)**

On en déduit que la droite d'équation $x = -1$ est une **asymptote verticale** de ($\mathscr{C}$). **(0,25 pt)**

Limite de f en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+3}{x+3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x}{x}\right) = 3$. **(0,25 pt)**

Or $\lim\limits_{X \to 3} \ln X = \ln 3$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\dfrac{3x+3}{x+3}\right) = \ln 3$. **(0,25 pt)**

On en déduit que la droite d'équation $y = \ln 3$ est une **asymptote horizontale** de ($\mathscr{C}$) en $+\infty$. **(0,25 pt)**

c) Fonction dérivée de f :

Pour tout $x > -1$, on a $f'(x) = \dfrac{\frac{6}{(x+3)^2}}{\frac{3x+3}{x+3}} = \dfrac{3 \times 2(x+3)}{3(x+1)(x+3)^2} = \dfrac{2}{(x+1)(x+3)}$

d'où pour tout $x > -1$, $f'(x) = g(x)$. **(0,25 pt × 2)**

d) $f'(x)$ a donc le signe de $g(x)$ pour $x > -1$. Or, d'après A.2)b), $g(x) > 0$ pour $x > -1$, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > -1$. **(0,25 pt)** +0,25

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$. **(0,25 pt)**

Tableau de variation **(0,25 pt)**

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	||	$-\infty \nearrow \ln 3$

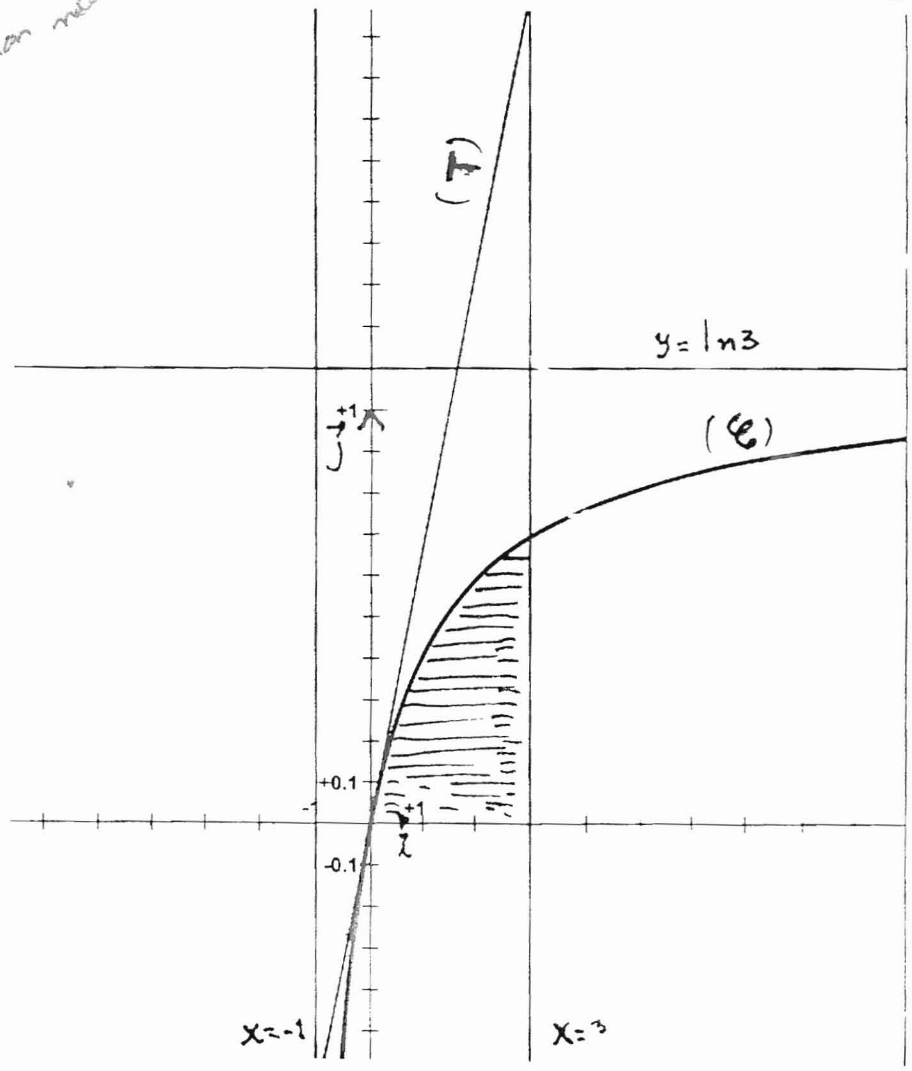
e) $f(0) = 0 \Rightarrow$ ($\mathscr{C}$) passe par le point O. **(0,25 pt)**

$(T): y = f'(0)x$. Or $f'(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow (T): y = \frac{2}{3}x$. **(0,25 pt)** +0,25

f) Un tableau de valeurs **(0,25 pt)**

non nécessaire

x	-0,75	-0,.5	0	1	3	6	11
$f(x)$	-1,099	-0,51	0	0,405	0,609	0,907	0,914



Asym. vert. **(0,25 pt)**
Asym. hor. **(0,25 pt)**
($\mathscr{C}$ **)** (0,5 pt)
(T) (0,25 pt)

repère
0,25

PARTIE C

1. F est dérivable sur $]-1;+\infty[$ car étant une somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout $x > -1$, $F'(x) = \ln(3x-3) - \frac{3(x+1)}{3x+3} - \ln(x-3) - \frac{x-3}{x-3}$ (0,25 pt)

$= \ln(3x+3) - \ln(x-3)$

$= \ln\left|\frac{3x+3}{x-3}\right| = f(x) \Rightarrow F$ est une <u>primitive</u>

de f sur $]-1;+\infty[$. (0,25 pt)

2. $\mathscr{A} = \left(\int_0^3 f(x)dx\right) u.a.$ **(0,25 pt)**

$= [F(3) - F(0)]\, u.a.$ **(0,25 pt)**

$= (\ln 4)u.a. = (2\ln 2)u.a.$ **(0,25 pt)**

$1\ u.a. = 10cm^2 \Longrightarrow \mathscr{A} = (10\ln 4)\, cm^2$ ou $(20\ln 2)\, cm^2$. **(0,25 pt)**