1 b

RÉPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAURÉAT

2005 - 1 MATHÉMATIQUES
SÉRIE : B
Durée : 3H
Coefficient : 3

EXERCICE I 5,5 points

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de moutons y_i qu'un boucher a pu vendre durant la fête de «Tabaski » de 1996 à 2005.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de moutons y_i	72	60	72	61	101	108	107	110	115	130

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

1 cm sur l'axe des abscisses représente le rang d'une année et 2cm sur l'axe des ordonnées représentent 5 moutons. On choisira le point de coordonnées (0 ; 50) comme origine du repère

1°) Représenter le nuage des points $M_i(x_i\ ,\ y_i)$ associé à cette série.

2°) a) Déterminer les coordonnees du point moyen G_1 de la série $(x_i\ ;\ y_i)$ pour $1 \leq i \leq 5$

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G_2 de la série $(x_i\ ;\ y_i)$ pour $6 \leq i \leq 10$.

c) Écrire une équation de la droite (G_1G_2), puis tracer (G_1G_2).

3°) On pourra utiliser pour les questions qui suivent le tableau suivant :

$\sum_{i=1}^{i=10} x_i = 55$	$\sum_{i=1}^{i=10} y_i = 936$	$\sum_{i=1}^{i=10} x_i y_i = 5780$ 5769	$\sum_{i=1}^{i=10} x_i^2 = 385$	$\sum_{i=1}^{i=10} y_i^2 = 93228$

a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

b) Calculer les variances V(X) et V(Y), la covariance Cov (X . Y) de la série $(x_i\ ;\ y_i)$, à 10^{-2} près.

c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y, à 10^{-3} près.

d) Un ajustement affine est-il justifié ? Si oui, déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

4°) On considère $N_i(x_i\ ;z_i)$ un point de la droite (G_1G_2) et $P_i(x_i\ ;\ t_i)$ un point de la droite $\mathscr{D}$.

a) Soit $S_1 = \sum_{i=1}^{i=10}(y_i - z_i)^2 = 797{,}47$ et $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10}(y_i - t_i)^2 = 776{,}90$.

Interpréter chacune des sommes S_1 et S_2.

b) En déduire la droite la mieux indiquée pour représenter cette série statistique.

EXERCICE II 4,5 points

Au cours d'une caravane médicale pour la lutte contre le sida, on a estimé dans une région que 30% de la population sont séropositifs. Le Ministère de la Santé Publique décide alors de procéder à des tests obligatoires de dépistage sur tout individu de cette population, afin de prendre des mesures de traitement à grande échelle

A l'issue du test, on a observé que 92% des personnes soupçonnées d'être seronégatives ont un test négatif et que 4% des personnes soupçonnées d'être séropositives ont un test négatif. On note :

* S l'événement « la personne est soupçonnée d'être séropositive » ;

* T l'événement « le test est positif » ;
* $\overline{S}$ l'événement contraire de S ;
* $P(T/S)$, la probabilité d'avoir un test positif lorsqu'on est soupçonné d'être séropositif.

1°) a) Préciser $P(S)$; $P(\overline{T}/\overline{S})$; $P(\overline{T}/S)$.

b) Calculer $P(\overline{S})$; $P(T/\overline{S})$ et $P(T/S)$.

2°) Déterminer la probabilité pour une personne

a) d'être séropositive et d'avoir un test positif.

b) d'être séronégative et d'avoir un test positif.

c) d'avoir un test positif.

3°) Une personne a subi un test et le résultat est positif.

Quelle est la probabilité qu'on l'ait préalablement soupçonnée d'être séronégative ?

On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

PROBLÈME 10 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 1 cm).

Partie A (3 points)

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = 1 - 2x - e^{-2x}$

1°) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2°) a) Calculer $g'(x)$.

b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

c) En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B (7 points)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -x - 2 + (1-x)e^{2x}$.

1°) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Calculer la limite de f en $-\infty$. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty}(xe^{2x}) = 0$

2°) a) Calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x) = e^{2x}g(x)$

b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

3°) a) Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = -x - 2$

Montrer que $(\mathscr{D})$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

b) Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$

4°) a) Justifier que la courbe $(\mathscr{C})$ traverse l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α tel que $-2 < \alpha < -1{,}9$

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$.

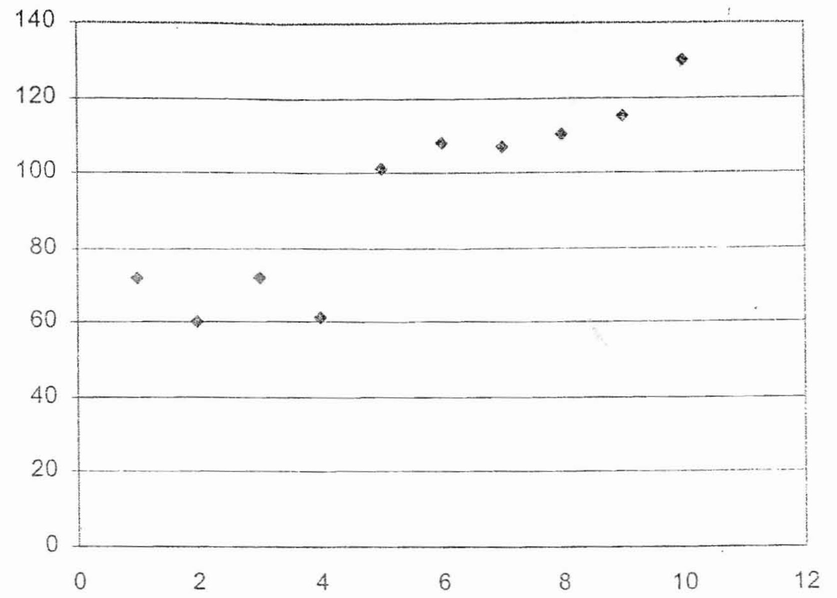
c) Tracer $(\mathscr{D})$, (T) et $(\mathscr{C})$ dans le même repère.

5°) À l'aide d'une intégration par parties, calculer, en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie limitée par la droite $(\mathscr{D})$ la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

9 9

Série B : Corrigé de l'Épreuve de Mathématiques Baccalauréat Session 2005

I 1°) Nuage des points de la série



0,75

1

2°) a) Coordonnées du point moyen G_1

$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{15}{5} = 3$ et $\bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = \frac{366}{5} = 73{,}2$ $\boxed{G_1(3\,;\,73{,}2)}$ 0,50

b) Coordonnées du point moyen G_1

$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=6}^{10} x_i = \frac{40}{5} = 8$ et $\bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=6}^{10} y_i = \frac{570}{5} = 114$ $\boxed{G_2(8\,;\,114)}$ 0,50

c) Équation de la droite (G_1G_2)

$\overrightarrow{G_1G_2}\begin{pmatrix} 8-3 \\ 114-73{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{G_1G_2}\begin{pmatrix} 5 \\ 40{,}8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G_2M}\begin{pmatrix} x-8 \\ y-114 \end{pmatrix}$ si $M(x\,;\,y)$ est un point de cette droite. Les vecteurs définis sont colinéaires et : $\boxed{y = 5{,}1x + 73{,}2}$ 0,50

$y = 8{,}16x + 48{,}72$
$y = 8{,}16x + 48{,}72$

3°) a) Coordonnées du point moyen G

$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{55}{10} = 5{,}5$ et $\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{936}{10} = 93{,}6$ $\boxed{G(5{,}5\,;\,93{,}6)}$ 0,50

b) Calcul de la variance $V(x)$

$V(x) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 = 38{,}5 - 5{,}5^2$ $\boxed{V(x) = 8{,}25}$ 0,25

Calcul de la variance $V(y)$

$V(y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \bar{y}^2 = 9322{,}8 - 93{,}6^2$ $\boxed{V(y) = 561{,}84}$ 0,25

Calcul de la covariance $\mathrm{cov}(x,y)$

$\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = 578 - 5{,}5 \times 93{,}6$ $\boxed{\mathrm{cov}(x,y) = 63{,}20}$ 0,25

62,1

c) Calcul du coefficient de corrélation linéaire entre x et y

$r = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}} = \frac{63{,}2}{\sqrt{8{,}25 \times 561{,}84}} = 0{,}928$ 0,912 0,50

d) Un ajustement affine est-il justifié ?

Oui, car le coefficient de corrélation linéaire ($r = 0{,}928$) est supérieur à 0,87. 0,25

7,53

Le coefficient directeur de la droite de régression est : $a = \dfrac{cov(x,y)}{V(x)} = \dfrac{63,2}{8,25}$

L'ordonnée à l'origine est $b = \overline{y} - 7,66\overline{x} = 93,6 - 7,66 \times 5,5$ $52,2 = b$

Une équation de la droite de régression est : $\boxed{y = 7,66x + 51,47}$ 0,50

$y = 7,53x + 52,2$

4°) a) Interprétation des sommes S_1 et S_2

S_1 est la somme des carrés des distances entre les points de même abscisse situés dans le nuage et sur la droite (G_1G_2). 0,25

S_2 est la somme des carrés des distances entre les points de même abscisse situés dans le nuage et sur la droite de régression. 0,25

b) $S_2 < S_1$ alors la droite de régression est la mieux indiquée pour représenter cette série. 0,25

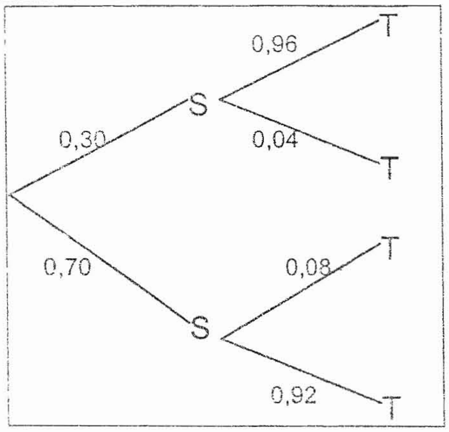
II 1°) a) Valeurs de $p(S)$, $p(\overline{T}/\overline{S})$, $p(\overline{T}/S)$

Par hypothèse, $p(S) = 0,30$; $p(\overline{T}/\overline{S}) = 0,92$; $p(\overline{T}/S) = 0,04$ 0,75

b) Calcul de $p(\overline{S})$, $p(T/\overline{S})$, $p(T/S)$

$\boxed{p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 0,70}$; $\boxed{p(T/\overline{S}) = 1 - p(\overline{T}/\overline{S}) = 0,08}$; $\boxed{p(T/S) = 1 - p(\overline{T}/S) = 0,96}$ 1,50

Arbre des probabilités



$S \cap T \Rightarrow p(S \cap T) = 0,3 \times 0,96 = 0,288$

$S \cap \overline{T} \Rightarrow p(S \cap \overline{T}) = 0,3 \times 0,04 = 0,012$

$\overline{S} \cap T \Rightarrow p(\overline{S} \cap T) = 0,7 \times 0,08 = 0,056$

$\overline{S} \cap \overline{T} \Rightarrow p(\overline{S} \cap \overline{T}) = 0,7 \times 0,92 = 0,644$

2°) a) Probabilité pour qu'une personne soit séropositive et ait un test positif.

Une personne est séropositive et a un test positif est l'événement $S \cap T$ et $p(S \cap T) = 0,3 \times 0,96 = 0,288$ $\boxed{p(S \cap T) = 0,288}$ 0,50

b) Probabilité pour qu'une personne soit séronégative et ait un test positif.

Une personne est séronégative et a un test positif est l'événement $\overline{S} \cap T$ et $p(\overline{S} \cap T) = 0,7 \times 0,08 = 0,056$ $\boxed{p(\overline{S} \cap T) = 0,056}$ 0,50

c) Probabilité d'avoir un test positif.

Avoir un test positif est l'événement $T = (S \cap T) \cup (S \cap \overline{T})$ et $p(T) = p(S \cap T) + p(S \cap \overline{T}) = 0,288 + 0,056$ $\boxed{p(T) = 0,344}$ 0,50

3°) Probabilité pour qu'on l'ait préalablement soupçonnée d'être séronégative

Probabilité pour qu'on l'ait préalablement soupçonnée d'être séronégative est la probabilité de l'événement $\overline{S}$ sachant que T est réalisé : $p(\overline{S}/T)$. 0,50 0,25

$$p(\overline{S}/T) = \frac{p(\overline{S} \cap T)}{p(T)} = \frac{0,056}{0,344}$$ $\boxed{p(\overline{S} \cap T) = \dfrac{7}{43}}$ ~~0,50~~ 0,5

PROBLÈME

A 1°) Calcul des limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-2x}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$ $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$ 0,50

$g(x) = 2x\left(\dfrac{1}{2x} - 1 + \dfrac{e^{-2x}}{-2x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-2x}}{-2x} 0$ — $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$ — 0,50

2°) a) Calcul de $g'(x)$.

$g'(x) = -2 + 2e^{-2x} = 2(e^{-2x} - 1)$ — $\boxed{g'(x) = 2(e^{-2x} - 1)}$ — 0,50

b) Variations et tableau de g

Si $e^{-2x} - 1 \geq 0$, alors $x \leq 0$ et $g'(x) \geq 0$ — $\boxed{x \leq 1 \Leftrightarrow g \text{ est croissante}}$

Si $e^{-2x} - 1 \leq 0$, alors $x \geq 0$ et $g'(x) \leq 0$ — $\boxed{x \geq 1 \Leftrightarrow g \text{ est décroissante}}$ — 0,50

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

0,50

c) Signe de $g(x)$

g admet un maximum nul, donc g est une fonction négative sur IR et, pour tout x de IR, $g(x) \leq 0$. — 0,50

B 1°) a) Limite de f en $+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(1 - x)e^{2x}\right] = -\infty$ — $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ — 0,50

et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 2) = -\infty$

b) Limite de f en $-\infty$

$f(x) = -x - 2 + e^{2x} - xe^{2x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{2x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ — $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ — 0,50

2°) a) Calcul de $f'(x)$

$f'(x) = -1 - e^{2x} + 2(1 - x)e^{2x} = -1 + e^{2x} - 2xe^{2x}$ — 0,50

$f'(x) = e^{2x}(1 - 2x - e^{-2x}) = e^{2x}g(x)$ — $\boxed{f'(x) = e^{2x}g(x)}$ — 0,50

b) Sens et tableau de variations de f

Signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$, donc $f'(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à IR. — 0,50

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	- 1 ↘	$-\infty$

0,50

3°) a) La droite $\mathscr{D}$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (-x - 2)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(1 - x)e^{2x}\right] = -\lim\limits_{x \to -\infty} \left(xe^{2x}\right) = 0$

donc la droite d'équation y = - x - 2 est une asymptote à la courbe C. — 0,50

b) Position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$

Elle dépend du signe de [f(x) - (- x - 2)], c'est-à-dire de $(1 - x)e^{2x}$ ou de 1 - x.

Si 1- x > 0 ou si x < 1, f(x) > - x -2 : $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$.

Si 1 - x < 0 ou si x > 1, f(x) < -x -2 : $\mathscr{C}$ est en-dessous de $\mathscr{D}$. — 0,50

4°) a) $\mathscr{C}$ traverse l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α

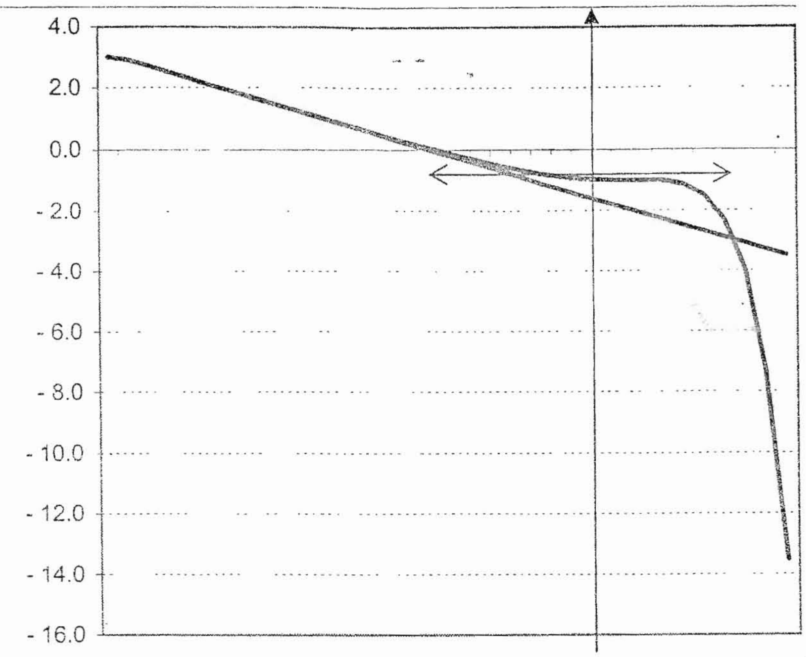
f est dérivable et strictement monotone décroissante, donc f est une bijection de IR sur IR. L'équation f(x) = 0 possède donc une seule solution α. — 0,25

$f(-2) \approx 0{,}055$ et $f(-1{,}9) \approx -0{,}035$: $f(-2) \times f(-1{,}9) < 0$, donc $-2 < \alpha < -1{,}9$ — 0,50

b) Équation de la tangente (T) en $x = 0$.

$f'(0) = 0$, alors une équation de (T) est $y = f(0) = -1$ — 0,25

c) Courbe $\mathscr{C}$, droites (T) et $(\mathscr{D})$



$\mathscr{C} \to 0{,}25$
AS - 0,25
tg 0,25

1

5°) Calcul de l'aire A

Soit I l'intégrale associée à l'aire du domaine proposé.

$$I = \int_{\alpha}^{0}[f(x) - (-x-2)]dx = \int_{\alpha}^{0}(1-x)e^{2x}dx$$ 0,25

Posons $U = 1 - x$; $U' = -1$

$V' = e^{2x}$; $V = \frac{1}{2} \times e^{2x}$

$$I = \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_{\alpha}^{0} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{0}e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{\alpha}^{0}$$

$$I = \left[\frac{1}{4}(3-2x)e^{2x}\right]_{\alpha}^{0} = \frac{3-(3-2\alpha)e^{2\alpha}}{4}$$ 0,5

L'aire A du domaine est $A = \frac{3-(3-2\alpha)e^{2\alpha}}{4}\ \text{cm}^2$ 0,25 $\boxed{A = \frac{3-(3-2\alpha)e^{2\alpha}}{4}\ \text{cm}^2}$ — 1