REPUBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2006-1 MATHEMATIQUES
Série : A1
Durée : 3 heures
Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5 points)

u est une fonction de la variable réelle x, dérivable sur son ensemble de définition.
On désigne par u' la fonction dérivée de u.
Voici le tableau des variations de u :

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$u(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ 0	↗	e	↘	0 ‖ 0	↘	-1

A. 1) Préciser l'ensemble de définition D de u, puis déterminer les limites de u aux bornes de D.

2) a) Quelles sont les solutions de l'équation $u(x)=0$?

b) Déterminer $u(1)$ et $u'(1)$.

3) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

B. En utilisant le tableau des variations de u, dresser les tableaux des variations des fonctions numériques f, g et h telles que :

a) $f=\ln u$; b) $g=|u|$; c) $h=\ln|u|$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

EXERCICE 2 (5 points)

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher sur lesquels sont inscrits les lettres du mot D I V I D E N D E, à raison d'une lettre par jeton.

1) On tire au hasard du sac successivement et sans remise quatre jetons que l'on pose côte à côte sur une table, dans l'ordre du tirage.

a) Quelle est la probabilité P_1 d'obtenir le mot V I D E ?

b) Quelle est la probabilité P_2 d'obtenir le mot E D E N ?

2) Cette fois, on tire simultanément et au hasard deux jetons parmi les neuf jetons du sac. A chacune des lettres D, V et N, on attribue la valeur 2 ; à la lettre E, on attribue la valeur 1 et à la lettre I, la valeur 3.

a) Calculer la probabilité P_3 de tirer deux jetons portant chacun la lettre E.

b) Calculer la probabilité P_4 de tirer deux jetons portant chacun une consonne.

c) Calculer la probabilité P_5 de tirer un jeton portant une consonne et un jeton portant la lettre I.

3) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat possible du tirage, associe la somme des valeurs des lettres qui y sont inscrites.

a) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique E(X).

PROBLEME (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité graphique est 2cm.

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ae^{2x}+be^{x}$ où a et b sont deux constantes réelles.

Déterminer a et b pour que la courbe (Γ) représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ passe par le point $A(0;-3)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur -2.

PARTIE B

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}-4e^{x}$ et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b) Quelle en est la conséquence graphique pour $(\mathscr{C})$?

2. a) Vérifier que $f(x)=e^{x}(e^{x}-4)$ pour tout réel x.
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-2)$ puis, étudier le sens de variation de f.
   b) Donner le tableau des variations complet de f.
   c) Ecrire une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.
   d) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses du repère.

4. On se propose d'étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).
Pour cela, on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=e^{2x}-4e^{x}+2x+3$.
   a) Etudier les variations de h, puis dresser son tableau de variation en y faisant figurer $h(0)$. (On ne demande pas de calculer les limites de h).
   b) En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x, puis donner la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).
   c) Tracer (Δ) et $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE C

On pose $L=\int_{0}^{\ln 2} h(x)dx$.

a) Calculer la valeur exacte de L.

b) En déduire la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine $\mathscr{D}$, ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} 0\le x\le \ln 2 \\ -2x-3\le y\le f(x) \end{cases}$.

CORRIGE SUJET 1 (Série A1)

ɛrcice 1

=]-∞ ; +∞[. **(0,25x2)**

$\iota(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -1$ **(0,25x2)**

u(x)= 0 ⇔ x=2 ou x= -1

S= {-1 ; 2}. **0,25x2**

u(1) = e et u'(1) = 0 **(0,25x2).**

$x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$

$x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1;2[$. **(0,5)**

	-∞	-1		2	+∞
)	-	0	+	0	-

$f = \ln u \Rightarrow D_f =]-1;2[$ **(0,75)**

	-1		1		2
)		+	0	-	
)	-∞	↗	0	↘	-∞

$; = |u| \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$ **(1)**

	-∞		-1		1		2		+∞
)		-		+	0	-		+	
)	+∞	↘	0	↗	e	↘	0	↗	1

$= \ln|u| \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$ **(1)**

	-∞		-1		1		2		+
)		-		+	0	-			
)	+∞	↘	-∞ || -∞	↗	1	↘	-∞ || -∞	↗	0

ɛice 2

ɔmbre de résultats possibles : $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

Nombre de cas favorables au tirage du mot

: $1 \times 2 \times 3 \times 2 = 12$ donc $P_1 = \frac{12}{3024} = \frac{1}{252}$ **(1)**

ombre de cas favorables au tirage du mot

DEN : $2 \times 3 \times 1 \times 1 = 6$ donc $P_2 = \frac{6}{3024} = \frac{1}{504}$ **(0,5)**

mbre de tirages possibles : $C_9^2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$

Nombre de cas favorables au tirage de deux jetons

Exercice 2 (suite)

portant chacun la lettre E : $C_2^2 = 1$ donc $P_3 = \frac{1}{36}$. **(0,5)**

b) Nombre de tirages permettant d'obtenir un jeton portant une consonne et un jeton portant la lettre I est :

$C_5^1 \times C_2^1 = 5 \times 2 = 10$ donc $P_4 = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ **(0,5)**

c) Nombre de tirages favorisant l'obtention de deux jetons portant chacun une consonne : $C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$ donc

$P_5 = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ **(0,5)**

3\. a) $X \in \{2;3;4;5;6\}$ **(0,5)**

b) Loi de probabilité de X **(1,25 avec -0,25 par erreur)**

$(X = x_i)$	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{10}{36} + 4 \times \frac{14}{36} + 5 \times \frac{10}{36} + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{140}{36} = \frac{35}{9}$$ **(0,25)**

Problème

Partie A

$g(x) = ae^{2x} + be^x$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$A(0,-3) \in (\Gamma) \Leftrightarrow g(0) = -3 \Leftrightarrow a + b = -3$ **(0,25x2)**

(Γ) admet en A une tangente de coefficient directeur -2 équivaut à $g'(0) = -2$. **(0,25x2)**

Or $g'(x) = 2e^{2x} + be^x$ donc **(0,25)**

$g'(0) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -2$ d'où le système **(0,5)**

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -4$$. **(0,5)**

Donc g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{2x} - 4e^x$.

Partie B

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = e^{2x} - 4e^x$.

1.a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} - e^x) = 0$ **(0,25)**

b) En conséquence, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à (C) en -∞. **(0,25)**

2\. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (e^x)^2 - 4e^x \Rightarrow f(x) = e^x(e^x - 4)$ **(0,25)**

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 4) = +\infty \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.(par produit) **(0,25)**

3\. a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x = 2e^x(e^x - 2)$ **(0,5+0,25)**

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \Rightarrow f'(x)$ a le signe de $e^x - 2$.

x	-∞		ln2		+∞
f(x)		-	0	+	

(0,5)

$\forall x \in]-\infty; \ln 2[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2]$. **(0,25)**

$\forall x \in]\ln 2; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[\ln 2; +\infty[$. **(0,25)**

Partie B (suite)

3. b) **(0,5)**

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

c) $(\Delta): y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow (\Delta): y = -2x-3$. **(0,5)**

d) $f(x)=0 \Leftrightarrow e^x(e^x-4)=0 \Leftrightarrow e^x-4=0$

$e^x-4=0 \Leftrightarrow x=\ln 4 = 2\ln 2 \Rightarrow B(2\ln 2;0)$.**(0,5)**

4. h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^{2x}-4e^x+2x+3$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2e^{2x}-4e^x+2$

a) $= 2(e^{2x}-2e^x+1)$ **(0,25)**

$= 2(e^x-1)^2 \Rightarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \geq 0$. **(0,25** **(0,25)**

On en déduit que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et h (0)=0. **(0,25),**

d'où le tableau de variation **(0,5)**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'(x)		$+$	0	$+$	
h(x)		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

b) En conclusion, $h(x)<0$ pour $x \in]-\infty;0[$

et $h(x)>0$ pour $x \in]0;+\infty[$. **(0,5)**

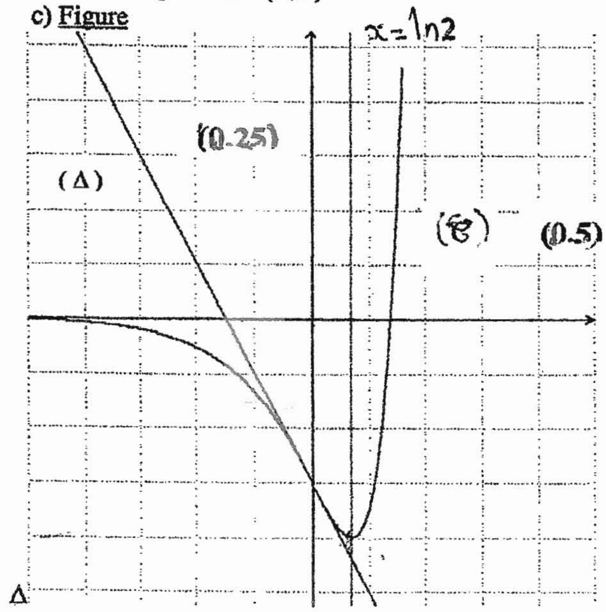
Position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (Δ)

Elle est donnée par le signe de $f(x)-(-2x-3)$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)-(-2x-3) = e^{2x}-4e^x+2x+3$
$= h(x)$ **(0,25)**

Donc d'après l'étude du signe de h(x), ($\mathscr{C}$) est au-dessus de (Δ) sur $]0;+\infty[$, ($\mathscr{C}$) est en-dessous de (Δ) sur $]-\infty;0[$ et . ($\mathscr{C}$) et (Δ) sont sécantes au point A. **(0,5)**

c) Figure



Partie C

a)

$L = \int_0^{\ln 2} h(x)dx$

$= \int_0^{\ln 2}(e^{2x}-4e^x+2x+3)dx$

$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x+x^2+3x\right]_0^{\ln 2}$ **(0,5)**

$= 2-8+(\ln 2)^2+3\ln 2-\frac{1}{2}+4$

$= -6+4-\frac{1}{2}+(\ln 2)^2+3\ln 2$

$= (\ln 2)^2+3\ln 2-\frac{5}{2}$ **(0,5)**

b) Calcul d(aire

On sait que $f(x)-(-2x-3) \geq 0$ sur $[0;\ln 2]$

donc

$\mathscr{A} = \int_0^{\ln 2}[f(x)-(-2x-3)]dx$ u.a.

$= \int_0^{\ln 2} h(x)dx$ u.a.

1 u.a.=4 cm^2, donc A =L×4cm^2

$= [4(\ln 2)^2+12\ln 2-10]cm^2$ **(0,5)**