DIRECTION DU BACCALAUREAT

Série : A1
Durée : 3 heures
Coef. : 4

EXERCICE I : Statistiques (5 points)

Dans un pays d'Afrique francophone, une université décide de passer des commandes des livres afin d'équiper sa bibliothèque. Ce projet d'une durée de 6 ans renouvelable a donné les résultats suivants durant les 6 premières années.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de livres y_i en milliers	12	11,50	10,50	9,50	8,50	7,50

1-a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ I, J)$? 0,75

b) La forme de ce nuage suggère-t-elle un ajustement affine ? Justifier votre réponse. 0,5

2) On se propose d'ajuster cette série par la méthode des moindres carrés.

a) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer dans le repère précédent. 0,75

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Interpréter le résultat. 1,25

c) Déterminer une équation réduite de la droite de régression (D) de y en x. 0,75

3) Tracer la droite (D). 0,5

4) On suppose que la tendance observée à la question 2) c) se maintient, déterminer le nombre de livres qui sera commandé en 2014. 0,5

EXERCICE II : Equations et Inéquation (5 points)

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^3 + 11x^2 - 20x + 7$.

1) Calculer $P(1)$. 0,5

2) Montrer que pour tout réel x, on a : $P(x) = (x-1)(2x^2 + 13x - 7)$. 1

3) Résoudre l'équation $P(x) = 0$. 1,5

4) En déduire la résolution de :

(E): $2e^{2x} + 11e^{x} - 20 = -7e^{-x}$. 0,75+0,25

(I): $2(lnx)^3 + 11(lnx)^2 - 20lnx + 7 < 0$. 1

PROBLEME (10 points)

PARTIE A : Signe d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 3x^2 - 6x - 6 - \frac{9}{x}$$

1) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$g(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 - 6x - 9}{x}$$

2) On pose : $p(x) = 3x^3 - 6x^2 - 6x - 9$.

a) Vérifier que $p(x) = 3(x-3)(x^2+x+1)$.

b) Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

PARTIE B Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x - 9lnx$.
Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;I,J)$
$(unité\ graphique : 1\ cm\ sur\ l'axe\ des\ abscisses\ et\ 0{,}5\ cm\ sur\ l'axe\ des\ ordonnées\ )$.

1- a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0, puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que :

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{9lnx}{x^3}\right)$$ 0,25

c) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2- ~~a) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de f.~~

b) Etudier le ~~sens de variation de f.(On remarquera que $f'(x) = g(x)$ sur $]0;+\infty[$)~~

c) ~~Dresser le tableau complet des variations de f.~~

3- a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.

b) Vérifier que ~~: $0{,}59 < \alpha < 0{,}61$ et $4{,}83 <$~~ $\beta < 4{,}85$.

4) Tracer (C).

PARTIE C : Calcul d'aire

On considère la fonction H définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x) = xlnx - x$.

1) Vérifier que H est une primitive de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = lnx$. 0,75

2) On considère le domaine D délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

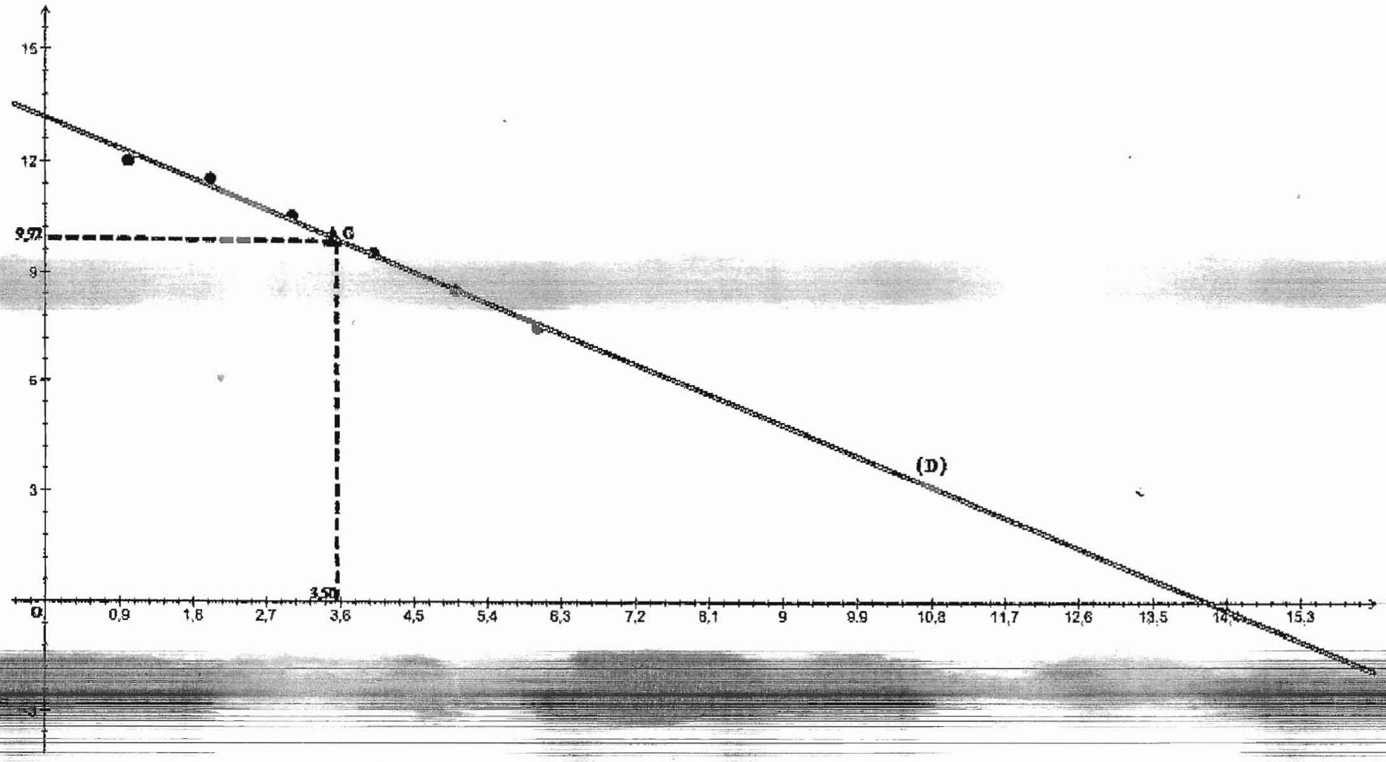
a) Hachurer le domaine D.

b) Calculer, en cm^2 la valeur exacte de l'aire du domaine D. 0,5 + 0,75

SERIE A1
PROPOSITION DE CORRIGE

EXERCICE 1 :

1-a) Nuage des points :



b) La forme du nuage suggère un ajustement affine, parce que les points du nuage semblent alignés.

2 − a) Coordonnées du point moyen $G\begin{pmatrix}3{,}5\\9{,}92\end{pmatrix}$*, placer le point G, voir graphique.*

b) Coeffient de corrélation linéaire: $-0{,}996$.

c) Equation réduite de la droite de régression (D) de y en x: $y = -0{,}93x + 13{,}17$

3) Pour le tracer de la droite (D), voir le graphique.

4) L'année 2014 correspond au rang $x_i = 9$

donc le nombre de livres commandés en 2014 est: $4{,}8 \times 1000 = 4800$ *livres*

EXERCICE 2 :

$p(x) = 2x^3 + 11x^2 - 20x + 7.$

1) $p(1) = 0$

2) *Après developpement et réduction, on trouve que:* $(x-1)(2x^2+13x-7) = 2x^3 + 11x^2 - 20x + 7$

3) *Résolution de l'équation:* $p(x) = 0$. $S = \left\{-7; \frac{1}{2}; 1\right\}$

4) *Déduction:*

(E): $S = \{-\ln(2)\,;0\}$ $\qquad$ (I): $\left]0\,,\frac{1}{e^7}\right[\cup \left]\sqrt{e}\,,e\right[$

PROBLEME :

PARTIE A :

$D_g =]0;+\infty[$

$g(x) = 3x^2 - 6x - 6 - \frac{9}{x}$

1) *La réduction au même dénominateur conduit à:* $g(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 - 6x - 9}{x}$

$2-a)$ *Vérification: après developpement et réduction on trouve que:*

$3(x-3)(x^2+x+1) = 3x^3 - 6x^2 - 6x - 9$

b) Signe de $g(x)$ *pour tout* x *de* $]0;+\infty[$.

$g(x) = 0$ *sur* $]0;+\infty[$; *pour* $x = 3$

Tableau de signe de $g(x)$

x	0		3		$+\infty$
$g(x)$	|	$-$	0	$+$	

PARTIE B :

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x - 9\ln x$.

$1-a)$ $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Interprétation graphique: La droite d'équation $x = 0$ *est asymptote verticale à la courbe.*

b) Dans l'expression de $f(x)$ *on met en facteur* x^3 *et on obtient:*

$$x^3\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{9\ln x}{x^3}\right)$$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$2-a)$ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 6 - \frac{9}{x}$

D'aprèsla ***partie*** *A, on a:* $f'(x) = g(x)\ \forall x \in]0;+\infty[$.

b) Sens de variation de f: Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $g(x)$.

Or d'aprèsla question 2b partie A on a:

pour tout $x > 3$, $f'(x) > 0$, *donc f est strictement croissante sur* $]3;+\infty[$.

pour tout x *de* $]0;3[$, $f'(x) < 0$, *donc f est strictement décroissante* .

c) Tableau de variations de f

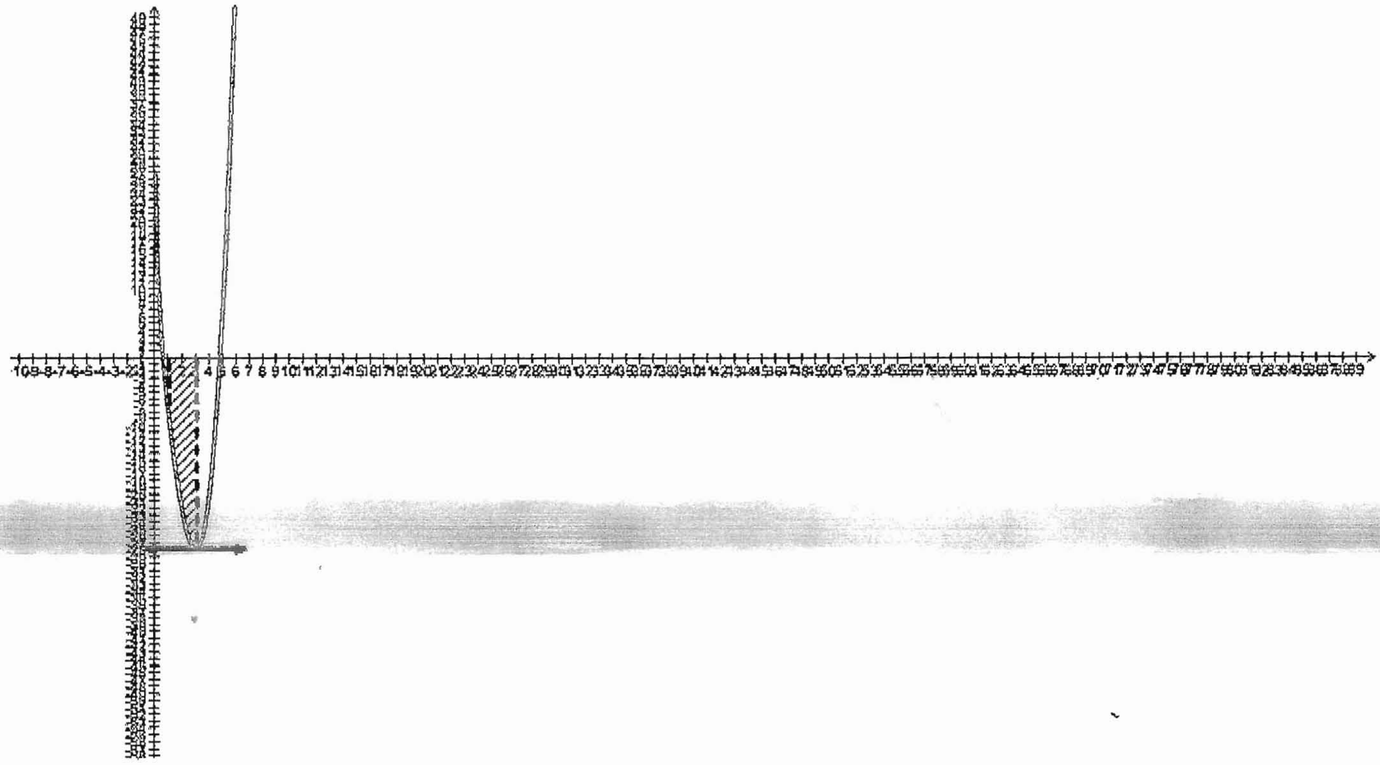
x		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	|$+\infty$ ↘	$-27{,}89$	↗ $+\infty$

3a) *On applique le théorèeme de la bijection sur les intervalles :* $]0;3[$ *et* $]3,+\infty[$

b) Vérification: $f(0{,}59) = 0{,}369$ *et* $f(0{,}61) = -0{,}100$. *Conclusion* $0{,}59 < \alpha < 0{,}61$

$f(4{,}83) = -0{,}461$ *et* $f(4{,}85) = 0{,}205$. *Conclusion* $4{,}83 < \beta < 4{,}85$

4) *Courbe.*



PARTIE C :

1) *Vérification*: $H(x) = xlnx - x$, on a: $H'(x) = lnx$ Donc : $H'(x) = h(x)$.

2 – a) *Domaine hachuré: Voir la courbe*

b) *L'aire de D est égale à:*

$$-\int_{1}^{3} f(x)dx = -\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 - 9(xlnx - x)\right]_1^3 \times 0.5cm^2 = (12 + 27\ln(3)) \times 0.50cm^2$$