

BAC C GABON

session 94

EXERCICE I (5 points)

Dans une urne il a $n-1$ boules blanches, n boules vertes, $n+1$ boules rouges. n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3. I-. On tire trois boules simultanément de l'urne et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.

Calculer l'espérance mathématique de X , notée $E(X)$, et vérifier qu'elle est indépendante de n .

II-. On suppose désormais que $n = 4$.

Un premier tirage simultanée de 3 boules ayant été effectué, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on tire une deuxième fois trois boules simultanément. On désigne par A_1, A_2, A_3 et B les événements suivants :

A_1 : le premier tirage ne contient pas de boule verte.

A_2 : le premier tirage contient exactement une boule verte.

A_3 : le premier tirage contient exactement deux boules vertes.

A_3 : le premier tirage contient exactement trois boules vertes.

B : le deuxième tirage contient exactement deux boules vertes.

1°) Calculer les probabilités des événements A_1, A_2, A_3 .

2°) Calculer $p(B/A_1), p(B/A_2), p(B/A_3)$.

Remarque : $p(B/A_i)$ désigne la probabilité de B sachant que A_i est réalisé, avec i élément de $\{0, 1, 2, 3\}$.

3°) En déduire les probabilités des événements $B \cap A_1, B \cap A_2, B \cap A_3$.

4°) Calculer la probabilité de l'événement B .

EXERCICE II (5 points)

Soit un carré ABCD de centre O tel que $AB = a$ et

$(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On note I, J, K et L les milieux respectifs de

$[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1°) a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s , de centre O , qui transforme A en I .

b) Montrer que le quadrilatère IJKL est l'image par s du carré ABCD. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Calculer son aire.

2°) Soit A', B', C' et D' les isobarycentres des triangles AOB, BOC, COD et DOA.

Démontrer que la quadrilatère $A'B'C'D'$ est l'image du quadrilatère IJKL par une transformation simple que l'on précisera. En déduire la nature et l'aire du quadrilatère $A'B'C'D'$.

3°) On considère une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD. Les perpendiculaires au plan de base menées par A', B', C' et D' (définis au 2°) coupent les faces SAB, SBC, SCD et SDA respectivement en G_1, G_2, G_3 et G_4 .

a) Démontrer que G_1, G_2, G_3 et G_4 sont les isobarycentres de ces faces.

b) Démontrer que le quadrilatère $G_1G_2G_3G_4$ est un carré. (On pourra démontrer qu'il est l'image du quadrilatère IJKL par une transformation simple de l'espace)

PROBLEME (10 points)

Pour tout entier n , on considère la fonction f_n définie sur

$]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$.

On appelle (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . (unité graphique : 4 cm).

Partie A: (3,5 points)

1°) On suppose $n = 0$.

a) Etudier les limites de f_0 en 0 et en $+\infty$.

En déduire les asymptotes à la courbe (C_0) .

b) Etudier les sens de variations de f_0 , puis dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe (C_0) .

2°) On suppose $n \geq 1$.

a) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) .

En déduire les coordonnées du point d'intersection, I , de (C_n) et (C_{n+1}) .

b) On considère la droite (D) d'équation $x = 1$ et M un point de (C_n) de coordonnées $(x; f_n(x))$. La droite (OM) coupe (D) en N . Calculer l'ordonnée du point N en fonction de x et de $f_n(x)$.

c) Vérifier que le point M' de même abscisse que M et de même ordonnée que N est un point de (C_{n+1}) .

d) Tracer la courbe (C_1) à partir de la courbe (C_0) en utilisant la construction précédente.

Partie B: (3 points)

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

1°) On considère la fonction F_n définie sur $]10; +\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_{10}^x f_n(t) dt.$$

Justifier l'existence de $F_n(x)$.

2°) On pose $G_n(x) = e^{10} F_n(x)$, et on admet que la fonction G_n a une limite J_n quand x tend vers $+\infty$.

Démontrer que, pour tout n , et pour tout $x \in]10; +\infty[$:

$$0 \leq G_n(x) \leq \frac{1}{10^{n+1}}.$$

En déduire un encadrement de J_n .

3°) A l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour tout n , et pour tout x de $]10; +\infty[$,

$$G_n(x) = \frac{1}{10^{n+1}} - \frac{e^{-x+10}}{x^{n+1}} - (n+1)G_{n+1}(x)$$

En déduire que $J_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{10^{n+1}} - J_n \right)$

Partie C: (3,5 points)

L'objet de cette partie est de déterminer une valeur approchée de J_0 .

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et de terme général u_n , pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{10} - \frac{1!}{10^2} + \frac{2!}{10^3} - \frac{3!}{10^4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{10^n}$$

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$J_0 - u_n = (-1)^n n! J_n$$

On rappelle que $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$.

2°) a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$|J_0 - u_n| \leq \frac{n!}{10^{n+1}}$$

b) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p, q) :

$$u_{2p} \leq J_0 \leq u_{2q+1}.$$

3°) On considère la suite (r_n) définie pour tout entier naturel n par : $r_n = \frac{n!}{10^{n+1}}$

a) Etudier suivant les valeurs de n le signe de $r_{n+1} - r_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n : $r_9 \leq r_n$.

b) En utilisant 2a) de la partie C, donner un encadrement de J_0 d'amplitude $2r_9$.

c) En remarquant que $u_{10} = u_9 - r_9$ et en utilisant 2b) de la partie C, donner un encadrement de J_0 d'amplitude r_9 , puis une valeur approchée de J_0 à $\frac{r_9}{2}$ près.

On donne $u_9 = 0,09158192$ et $r_9 = 0,000036288$.