REPUBLIQUE GABONAISE **2001 –1- MATHEMATIQUES**
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT **Série : C-E**
Durée : 4 heures
Coef: 5

Exercice 1 (5 points)
Soit ABCD un parallélogramme direct. Placer les points M et N tels que les triangles BMC et DCN soient équilatéraux directs. L'objet de cet exercice est démontrer par deux méthodes différentes que le triangle AMN est équilatéral.

1°) Première méthode

Soit σ la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$. Montrer que $\sigma\left(\overrightarrow{AM}\right)=\overrightarrow{AN}$ puis conclure

(on pourra utiliser $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$)

2°) Deuxième méthode

Placer les points E et F tels que ABME et ADNF soient des parallélogrammes.

a) Prouver que $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{3}$. Quelle est l'image de E par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$?

b) Montrer que r(B)=F.

c) Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DN}$. Montrer que $t_2\circ r\circ t_1$ est une rotation d'angle qui transforme B en F. En déduire que $r=t_2\circ r\circ t_1$.

d) Déterminer l'image de M par $t_2\circ r\circ t_1$ puis conclure.

Exercice 2 (5 points)
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction numérique de la variable réelle x définie pour tout x différent de 1 par : $f_n(x)=\frac{2^x}{(1-x)^n}$ On pose $I_n=\int_{-1}^{0}f_n(x)dx$.

1°)

a) Expliquer pourquoi I_n a bien un sens.

b) Etablir que $I_n\geq 0$ pour tout entier naturel n.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

d) La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

2°) En utilisant le sens de variation de la fonction $x\mapsto 2^x$ sur l'intervalle $\left[-1;0\right]$.

a) Montrer que l'on a pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle $\left[-1;0\right]$.

$$\frac{1}{2(1-x)^n}\leq f_n(x)\leq\frac{1}{(1-x)^n} .$$

b) Etablir alors que pour tout entier naturel n $(n\geq 2)$:

$$\frac{1}{2(n-1)}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]\leq I_n\leq\frac{1}{(n-1)}\left[1-\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

3°) a) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que pour tout réel x de $\left[-1;0\right]$:

$$f_n^{'}(x)=(\ln 2)\,f_n(x)+nf_{n+1}(x) .$$

b) En déduire alors que pour tout entier naturel n on a : $(\ln 2)I_n+nI_{n+1}=1-\frac{1}{2^{n+1}}$.

c) Calculer alors la limite de $(nI_{n+1})_{n\geq 0}$.

PROBLEME (10 points)

Soit un segment [AB] à support vertical et O son milieu. Construire les points A’ et B’ tels que les triangles AOA’ et BOB’ soient rectangles, directes et isocèles respectivement en A et B.
Soit s la similitude directe qui transforme A en A’ et B en B’.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que $\vec{v}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, on considère ($C_m$) la courbe d’équation : $(C_m): x^2-(m+1)y^2+my+3(2m+3)=0$ où m désigne un nombre réel donné.

Partie A. Détermination par deux méthodes différentes caractéristique de s.

Première méthode.

1°) Montrer que O est le milieu de [A’B’] et en déduire que O est invariant par s.

2°) Déterminer les éléments caractéristiques de s.

3°) Soit M un point du plan différent de O et M’ son image par s.

a) Calculer $\frac{OM'}{OM}$ et $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'}$.

b) Calculer $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{MM'}$ (on pourra remarquer que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM'}$).

c) En déduire la nature du triangle OMM’. Donner alors une méthode géométrique de construction de M’.

Deuxième méthode.

1°) En utilisant les affixes des points A, B, A’ et B’, montrer que l’écriture complexe de s est : $Z'=(1-i)Z$. Préciser les éléments caractéristiques de s.

Partie B. Etude de la famille (C_m) et son image par s.

1°) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe à déterminer.

2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des courbes (C_{-2}) et (C_0).

Construire (C_0) et (C_{-2}) dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3°) Dans cette question, on suppose que $m\neq-1$ et $m\neq-\frac{6}{5}$.

a) Montrer que l’équation de (C_m) est équivalente à :

$$\frac{\left(y-\frac{m}{2(m+1)}\right)^2}{\left(\frac{5m+6}{2(m+1)}\right)}-\frac{x^2}{\frac{(5m+6)^2}{4(m+1)}}=1$$

b) Discuter alors suivant les valeurs de m la nature de (C_m).

c) Justifier pourquoi (C_m) est une conique à centre, puis déterminer en fonction de m les coordonnées du centre I_m de (C_m).

4°) a) Justifier que l’ensemble (C'_{-2}) transformé de (C_{-2}) par s est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Vérifier qu’une équation cartésienne de (C'_0) transformé de (C_0) par s est : $y=\frac{9}{x}$. Construire (C'_0) sur la figure précédente.

5°) a) On donne la droite (D) d’équation $y=-\frac{1}{2}x+3$, déterminer une équation de (D’) image de (D) par s.

b) Soit E et F les points communs à et d’ordonnées positives, E’ et F’ leurs images respectives par s. Déterminer les couples de coordonnées des points E, F, E’ et F’.

c) Soit S la surface limitée par (C_0) et le segment [EF]. Hachurer sur la figure S et son image S’ par s. Montrer que l’aire en unité d’aire de S’ est donnée par : $a(S')=\int_1^3\left(-3x+12-\frac{9}{x}\right)dx$. Calculer $a(S')$, en déduire l’aire de S.