30

LJAA / POG

DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°

Série : C- E

Durée : 4 heures

Coef. : 5

Exercice 1(5 points)

L'objectif est d'étudier la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par ;

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \text{ et, pour } n \geq 1,\ U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

1°) Soit f la fonction numérique définie sur [0,1] par : $f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Montrer que $f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$, en déduire U_0, puis Calculer U_1.

2°) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Justifier que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge.

b) Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1], on a : $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. (1)

Déterminer la limite de (U_n).

3°) Pour tout entier $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{(1+x^2)^3}\, dx$.

a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.

b) Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$I_n = \frac{2\sqrt{2}}{n-1} - \frac{3}{n-1} U_n.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 3$: $(n+2)\, U_n + (n-1)\, U_{n-2} = 2\sqrt{2}$

c) En utilisant la monotonie de la suite U_n, montrer que :

$(n+2)\, U_n + (n-1)\, U_{n-2} \leq (2n+1)\, U_{n-2}$

Etablir alors que pour tout $p \geq 1$: $(2p+5)\, U_p \geq 2\sqrt{2}$ (2)

d) A l'aide des inégalités (1) et (2) montrer que : $2\sqrt{2} \leq (2p+5)\, U_p \leq \frac{(2p+5)\sqrt{2}}{p+1}$

e) Prouver alors que la suite $(n\, U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

***Exercice 2**(5 points)*

ABC est un triangle. M est un point du plan distinct de A, de B et de C. On désigne par P, Q et R les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (BC), (AC) et (AB) .

1°) Faire une figure.

2°) Démontrer que :

a) les points M, A, Q et R sont cocycliques.

b) les points M, P , R et B sont cocycliques.

3°) Justifier pourquoi :

a) $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MR}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{QR})$ (modulo π)

b) $(\overrightarrow{MR},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PR},\overrightarrow{CB})$ (modulo π)

4°) En déduire que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QR})$ (modulo π)

5°) a) Faire une nouvelle figure avec M sur le cercle circonscrit au triangle ABC, puis tracer la droite (PQ). Que constatez–vous ?

b) En utilisant la question 4°), démontrer alors que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

La droite passant par P, Q et R est appelée la droite de SIMSON du point M.

6°) Dans cette question, on suppose que M est sur (ℭ) le cercle circonscrit au triangle (ABC).

(D) désigne la droite de SIMSON du point M. La droite (MP) recoupe (ℭ) en E.

a) Faire une nouvelle figure.

b) En utilisant la cocyclicité des 4 points B, P, M et R, établir une relation entre : $(\overrightarrow{BR} ; \overrightarrow{BM})$ et $(\overrightarrow{PR} ; \overrightarrow{PM})$.

c) Justifier pourquoi : $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM})$ (modulo π)

d) En déduire alors que $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EM}) = (\overrightarrow{PR},\overrightarrow{EM})$ (modulo π). Quelle est alors la position relative des droites (EA) et (D).

PROBLEME(10 points)

PARTIE A

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$). On désigne par f l'application de P vers P qui au point M (x; y) associe le point M'(x' ; y') tel que :

$$\begin{cases} x' = x\ln a - y\ln b \\ y' = x\ln b + y\ln a \end{cases}$$

a et b étant deux réels strictement positifs.

On rappelle qu'une expression de la forme : z' = αz + β définie une transformation si et seulement si $\alpha \neq 0$.

On désigne par z l'affixe du point M (x, y) et par z' l'affixe du point M'(x ' ; y') image de M par f.

1°) a) Exprimez z' en fonction de z.

b) Pour quelles valeurs du couple (a ;b) f est une transformation ?

2°) Dans la suite le couple (a ; b) désigne les coordonnées d'un point N du plan.

a) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{E}$) des points N pour lesquels f est une homothétie.

b) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble ($\mathscr{E}$ ') des points N(a ; b) pour lesquels f est une rotation de centre O.

PARTIE B

1°) soit g : IR →IR : $x \mapsto e^x - x$.

a) Etudier les variations de g, puis donner le signe de g(x).

b) L'équation g(x) = 0 admet– elle une solution ? (Justifier votre réponse)

2°) On désigne par ($\mathscr{Q}$) le quart de plan défini par : ($\mathscr{Q}$) = { M (x ;y) tel que : x > 0 et y > 0 }

φ est l'application de P vers $\mathscr{Q}$ défini par :

$$\varphi : P \to Q \qquad M(x;y) \mapsto M'(x';y') \qquad \text{tel que } \begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^y \end{cases}$$

a) φ admet–elle des points invariants ? Justifier votre réponse.

b) Donner une équation cartésienne de l'image par φ de la droite (Δ) d'équation :

$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $(\alpha ;\beta) \neq (0 ;0)$

c) Préciser la nature de l'image par φ de la droite Δ dans les 2 cas suivants :

$\alpha = 0$, puis $\alpha = \beta$

PARTIE C

Soit ($\mathscr{C}$) le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) Vérifier que l'image par φ du cercle ($\mathscr{C}$) est l'ensemble ($\mathscr{E}$ ').

2°) (Γ_1) et (Γ_2) sont les courbes représentatives dans le plan P des fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $[\frac{1}{e};e]$ par :

$$f_1 : x \mapsto e^{\sqrt{1-\ln^2 x}} \qquad f_2 : x \mapsto e^{-\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

a) Etudier les variations de f_1 et de f_2.

b) Construire (Γ_1) et (Γ_2) sur un même graphe.

c) Montrer que ($\mathscr{E}$ ') = (Γ_1) ∪ (Γ_2)