REPUBLIQUE GABONAISE **1–Mathématiques–2005**

OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

Séries :	C et E
Durée :	4 heures
Cœff. :	5

Exercice 1 **(5 points)**

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ et f est une application affine de P dans P qui au point $M(x,\,y)$ associe le point $M'(x',\,y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \dfrac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par f.
2. Soit $M(x,\,y)$ un point du plan P n'appartenant pas à (Δ).
   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.
   b. Vérifier que la droite (MM') n'est pas parallèle à (Δ) et que le point H d'intersection des droites (Δ) et (MM') a pour coordonnées $\left(\dfrac{5x-y-3}{9}\,,\,\dfrac{-20x+4y-15}{9}\right)$.
   c. Ecrire le vecteur $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$. En déduire la nature de f dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. On considère la suite de points $M_n(x_n\,;\,y_n)$ telle que $M_0(1\,;\,8)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$
   a. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n
   b. Montrer par récurrence que tous les points $M_n(x_n\,;\,y_n)$ sont sur la droite $(\mathcal{D})$ dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$
   c. Montrer que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
4. Montrer que :
   a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
   b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
5. Montrer que $x_n = \dfrac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$. En déduire que pour tout naturel n, $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

Exercice 2 **(4 points)**

ABC est un triangle tel que $AB = 7\,cm$, $AC = 5\,cm$ et $BC = 4\,cm$. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. On considère le vecteur $\vec{u} = 16\overrightarrow{BC} + 25\overrightarrow{CA} + 49\overrightarrow{AB}$.
   a. Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$
   b. En déduire que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
2. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 16\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA'} + 25\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MB'} + 49\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC'}$.
   a. Calculer $f(O)$, O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   b. Montrer que $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA'}$ On admet de la même manière que

$BA^2 - BC^2 = 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BB'}$ et que $CB^2 - CA^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}$.

c. En déduire que si G désigne le centre de gravité du triangle ABC on a :

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = -4$; $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{GB'} = \dfrac{11}{2}$ et que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC'} = -\dfrac{3}{2}$.

Calculer alors la valeur de $f(G)$

d. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

3. a. Exprimer AA'^2 , BB'^2 et CC'^2 en fonction de AB^2 , AC^2 et BC^2 .

b. Montrer que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

c. Quel est alors l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 78$.

Problème **(11 points)**

Soit n un entier naturel non nul. La fonction f_n est définie sur $]-\infty ; 0]$ par :

$$f_n(x) = -x e^{\frac{1}{nx}} \quad , \text{si } x < 0 \text{ et } f_n(0) = 0 \ .$$

Partie A

1. *Etude des variations de f_n pour n entier naturel non nul.*

a. Prouver que la fonction f_n est continue sur $]-\infty ; 0]$.

b. Etudier la dérivabilité de f_n en 0.

c. Calculer $f_n'(x)$ pour $x < 0$ et justifier que f_n est strictement ~~croissante~~ décroissant sur $]-\infty ; 0]$.

2. *Etude de f_n au voisinage de $-\infty$.*

a. Déterminer la limite de f_n en $-\infty$

b. Soit la fonction g définie sur $]-\infty ; 0]$ par $g(x) = e^x - x - 1$. Donner le tableau de variation de g sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$. En déduire que pour tout réel x négatif on a $0 \le 1 - e^x \le -x$.

c. Soit $t \le 0$, en intégrant l'inégalité précédente sur $[t ; 0]$, montrer que :

$$0 \le e^t - (1+t) < \frac{t^2}{2} \ .$$

d. En déduire que pour tout réel $x < 0$ on a $0 \le f_n(x) + (x + \dfrac{1}{n}) \le \dfrac{-1}{2n^2 x}$. Justifier alors l'existence pour la courbe $(\mathscr{C}_n)$ de f_n , d'une asymptote (D_n) en $-\infty$. Préciser la position relative de $(\mathscr{C}_n)$ et de (D_n).

e. Dresser le tableau de variation de f_n .

3. *Tracé de courbes.*

a. Déterminer la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ en 0.

b. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et son asymptote (D_1) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 *cm*.

c. Démontrer que pour $n > 0$, $(\mathscr{C}_n)$ est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par l'homothétie de centre O, de rapport $\dfrac{1}{n}$. Construire alors $(\mathscr{C}_2)$ sur le même graphique que $(\mathscr{C}_1)$.

Partie B. *Etude de l'équation $f_n(x)=1$.*

1. Démontrer que pour tout $n>0$, l'équation $f_n(x)=1$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]-\infty;-1]$.

2. Démontrer que α_n est solution de l'équation $-x\ln(-x)=\frac{1}{n}$.

3. Soit h la fonction définie sur $]-\infty;-1]$ par $h(x)=-x\ln(-x)$.

   a. Etudier le sens de variation de h.

   b. Prouver que $-1{,}77\leq\alpha_1\leq-1{,}76$.

   c. Démontrer que la suite (α_n) est croissante. (On remarquera que $h(\alpha_n)=\frac{1}{n}$ et on comparera $h(\alpha_n)$ à $h(\alpha_{n+1})$).

4. Justifier que la suite (α_n) est convergente et que sa limite est inférieure à -1 .

Partie C. *Limite d'une fonction définie par une intégrale.*

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n=\int_{-1}^{0}f_n(t)\,dt$.

1. a. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

   b. Montrer que pour tout élément x de $[-1;\,0]$, on a $f_n(x)\leq -x$. En déduire que pour tout $n\geq 1$ on a $I_n\leq\frac{1}{2}$

   c. Que peut-on dire de la suite (I_n) ?

2. a. En utilisant la question d du 2 de la partie A, établir la relation $\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leq I_n$.

   b. Déterminer la limite de (I_n) .

5

Bac C et E– Session 2005
Corrigé de mathématiques

Exercice 1 (5 points)

1°) **Ensemble des points invariants par f**

f est définie par les équations : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$ un point est invariant par f si f(M) = M alors : l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation : $4x + y + 3 = 0$.

2°) **a) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.**

Soit M(x ;y) ∈P, M ∉ (Δ), le calcul donne $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}(4x + y + 3)(\vec{i} + 5\vec{j})$. Puisque M ∉(Δ)

Alors $\overrightarrow{MM'}$ a la direction du vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$.

2°) **b) (MM') n'est pas parallèle à (Δ). Coordonnées du point H.**

(Δ) a pour équation : $4x + y + 3 = 0$ un vecteur directeur de (Δ) est : $\vec{v} = (-1;4)$, il est évident que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc (MM') et (Δ) ne sont pas parallèles.

Coordonnées de H intersection de (MM') et de (Δ).

Posons : $H(\alpha;\beta), H \in (\Delta) \Leftrightarrow 4\alpha + \beta + 3 = 0;\quad H \in (MM') \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{HM};\vec{u}) = 0$. Cela conduit au système suivant : $\begin{cases} 4\alpha + \beta + 3 = 0 \\ -5\alpha + \beta = -5x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{9}(5x - y - 3) \\ \beta = \frac{1}{9}(-20x + 4y - 15) \end{cases}$ CQFD.

2°) c) **Expression de $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$.**

En utilisant les coordonnées des points H, M et M', on trouve l'égalité vectorielle:

$$\overrightarrow{HM'} = 4\overrightarrow{HM}$$

Nature et éléments caractéristiques de f.

L'égalité vectorielle nous permet d'affirmer que l'application affine f est une affinité d'axe (D), de direction $\vec{u} = \vec{i} + 5\vec{j}$ et de rapport 4.

3°) **La suite des points $M_{n+1} = f(M_n)$ avec $M_0 = (1\,;8)$**

a) **Expressions de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.**

L'expression analytique de l'application f donne : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}(7x_n + y_n + 3) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}(20x_n + 8y_n + 15) \end{cases}$

b) **Les points M_n appartiennent à une droite.**

Soit (D') la droite d'équation : $5x - y + 3 = 0$; il est évident que le point M_0 (1 ; 8) est un point de cette droite.

Supposons que pour n ∈ ℕ, M_n ∈(D'), montrons que cela entraîne que M_{n+1} ∈ (D').

M_n ∈ (D') équivaut à : $5x_n - y_n + 3 = 0$, dans cette condition, les coordonnées de M_{n+1} vérifient–elles l'équation de (D') ?

$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = \frac{5}{3}(7x_n + y_n + 3) - \frac{1}{3}(20x_n + 8y_n + 15) + 3 = 5x_n - y_n + 3$, d'après l'hypothèse de récurrence M_{n+1} ∈ (D') ; conclusion pour tout n ∈ ℕ, M_n ∈ (D').

Expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

$x_{n+1} = \frac{1}{3}(7x_n + y_n + 3)$ et M_n ∈ (D') : $5x_n - y_n + 3 = 0$ alors on trouve : $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

c) **Les x_n et y_n sont des entiers.**

$x_0 = 1 \in \mathbb{N}$, par récurrence on montre que les $x_n \in \mathbb{N}$.

et $y_n = 5x_n + 3$, puisque x_n est dans $\mathbb{N}$, alors y_n aussi.

4°) **Expression de x_n en fonction de n.**

L'égalité proposée $x_n = \frac{1}{3}\left(5 \times 4^n - 2\right)$ est vraie pour $n = 0$ ($x_0 = 1$)

Cela se démontre par récurrence sur n et utilisant la relation entre x_{n+1} et x_n.

5°) **Etude de la divisibilité de x_n et y_n.**

a) x_n divisible par 3 entraîne y_n divisible par 3.

Soit $k \in \mathbb{N}$, si $x_n = 3k; \quad \Rightarrow y_n = 5x_n + 3 = 3(5k+1) = 3k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$.

y_n divisible par 3 implique x_n aussi.

Soit $y_n = 3k$, avec $k \in \mathbb{N}$, alors $5x_n - 3k + 3 = 0$, donc $5x_n = 3(k-1)$

3 et 5 sont premiers d'après Gauss 3 qui divise $5x_n$ divise x_n.

b) Si **x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3.**

Supposons PGCD (x_n ; y_n) = $d \neq 1$, il existe k et k' des entiers naturels tels que :

$x_n = k\,d$ et $y_n = k'd$ et $5x_n - y_n + 3 = 0 \Leftrightarrow d(k' - 5k) = 3$

donc d divise 3,

or les diviseurs de d sont 1 et 3 on a supposé $d \neq 1$, donc $d=3$ ce qui est absurde puisqu'on a supposé que x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3. Alors ils sont premiers entre eux.

Exercice 2 (4 points)

1°) $\vec{u} = 16\overrightarrow{BC} + 25\overrightarrow{CA} + 49\overrightarrow{AB}$

a) **Expression de $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**

$\vec{u} = 33\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC}$.

b) **Le vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.**

Les points A, B et C sont non alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.

2°) $f(M) = 16\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA'} + 25\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB'} + 49\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC'}$

a) **Calcul de f(O).**

Les droites (OA'), (OB') et (OC') sont les médiatrices des segments [BC], [AC] et [AB]

donc : $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, alors f(O) = 0

b) L'égalité $AC^2 - AB^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA'}$

On utilisant le carré scalaire et la propriété du milieu, on a :

$AC^2 - AB^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) **Utilisation des égalités 2°) b)**

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'})$, or G est le centre de gravité donc $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et d'après la 1ère égalité du 2°) b) on a :

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} = \frac{2}{6}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{6}(AC^2 - AB^2) = \frac{1}{6}(25 - 49) = -4.$

de même $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{GB'} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BB'}) = \frac{1}{6}(BA^2 - BC^2) = \frac{11}{2}$

et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC'} = \frac{1}{6}(2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}) = \frac{1}{6}(CB^2 - CA^2) = -\frac{3}{2}$

Calcul de f(G) on utilise les résultats précédents

$f(G) = 16\,\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GA'} + 25\,\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{GB'} + 49\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC'} = 0.$

d) **Ensemble des points vérifiant f(M) = 0**

On montre que : $f(M) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{MG} + f(G)$

$f(M) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{MG} = 0$

(Γ) est la droite passant par G, de vecteur normal $\vec{u}$, c'est la droite (OG).

3°) **a) Expressions de AA'^2, BB'^2, CC'^2 en fonction de AB^2, AC^2 et BC^2**

A' est le milieu de [BC], donc $AA' = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 + AB^2 - BC^2$

$AA'^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$

Itou : $BB'^2 = \frac{1}{4}(2BC^2 + 2BA^2 - AC^2)$

$CC'^2 = \frac{1}{4}(2CA^2 + 2CB^2 - AB^2)$.

b) Calcul de $GA^2 + GB^2 + GC^2$

G est situé au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane ainsi $GA = \frac{2}{3}AA'$ alors :

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2)$ on utilise le 3°) a) e qui donne

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 30$

c) **Ensemble ($\mathscr{C}$)**

$M \in (\mathscr{C})$ lorsque $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 78$,

or G est isobarycentre des points A,B et C : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Ce qui donne $MG = 4$; ($\mathscr{C}$) est le cercle de centre G de rayon 4.

Problème (11 points)

Partie A

1°) **Variations de f_n avec $n \in \mathbb{N}$**

a) **Continuité de f_n sur $]-\infty ; 0]$**

$\lim\limits_{x \to o} f_n(x) = 0 = f_n(0)$ donc f_n est continue en 0.

f_n est continue sur$]-\infty ; 0[$ car f_n est composée et produit de fonctions continues sur cet intervalle.

b) **Dérivabilité de f_n en 0**

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} -e^{\frac{1}{nx}} = 0 = f_n'(0)$, f_n est dérivable en 0.

c) **Dérivée et sens de variation de f_n**

$f_n'(x) = \left(\frac{1 - nx}{nx}\right)e^{\frac{1}{nx}}$ pour $x < 0$, il est vident que sur $]-\infty ; 0[$ cette dérivée est négative, donc

f_n est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

2°) **Etude de f_n au voisinage de $-\infty$.**

a) **Limite de f_n en $-\infty$.**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -xe^{\frac{1}{nx}} = +\infty$

b) **Tableau de variation de g et encadrement.**

$g(x) = e^x - 1 - x$ sur $]-\infty ; 0]$, g est dérivable ; $g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0
signe de g '	$-$
g	$+\infty$ ↘ 0

Pour tout $x \leq 0$; $g(x) \geq 0$ càd $e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x \leq -x$ de plus $e^x \leq 1$ pour $x \leq 0$.

On a donc sur $]-\infty ; 0]$: $0 \leq 1 - e^x \leq -x$.

c) **Intégration des inégalités.**

Pour tout $x \leq 0$ on a : $\quad 0 \leq 1 - e^x \leq -x$. intégrons ces inégalités sur [t ; 0], on obtient :

$$0 \le \int_t^0 (1-e^x)dx \le \int_t^0 -x dx$$ ce qui donne : $0 \le e^t-(1+t) \le \frac{t^2}{2}$

d) Asymptote à (C_n) en $-\infty$.

Posons : $t = \frac{1}{nx}$, $x < 0$, donc $t < 0$, d'après ce qui précède on a :

$0 \le e^{\frac{1}{nx}} - (1+\frac{1}{nx}) \le \frac{1}{2n^2x^2}$, $x < 0$ donc $-x > 0$ alors : $0 \le -xe^{\frac{1}{nx}} + (x+\frac{1}{n}) \le \frac{-1}{2n^2x}$ cqfd.

Cela s'écrit encore : $0 \le f_n(x) + (x+\frac{1}{n}) \le \frac{-1}{2n^2x}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2n^2x} = 0$, d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f_n(x)+(x+\frac{1}{n})\right] = 0$ alors la droite (D_n) d'équation $y = -(x+\frac{1}{n})$ est asymptote à la courbe (C_n) en $-\infty$.

e) Tableau de variation de f_n.

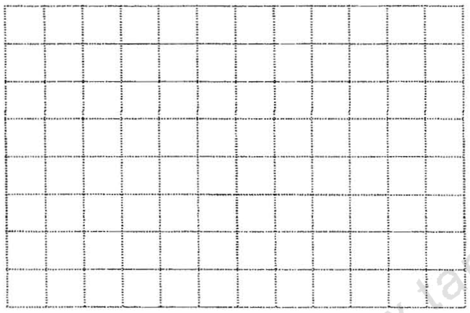
x	$-\infty$	0
signe de f'	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

3°) **Tracé des courbes**

a) Tangente à (C_1) en 0.

La tangente à (C_1) en x=0 a pour équation : $y = 0$

b) Représentation de (C_1)



c) (C_n) homothétique de (C_1), construction de (C_2)

L'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$ a pour équations : $\begin{cases} x' = \frac{1}{n}x \\ y' = \frac{1}{n}y \end{cases}$.

$M(x\,;\,y) \in (C_1) \Leftrightarrow y = -xe^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow y' = -x'e^{\frac{1}{nx}} \Leftrightarrow M'(x'\,;\,y') \in (C_n)$.

(C_2) est l'homothétique de (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

Partie B

1°) **Existence et localisation d'une solution de $f_n(x) = 1$**

$n > 0$, f_n est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$,
f_n réalise une bijection de $]-\infty\,;\,0]$ sur $[0\,;\,+\infty[$, 1 est une valeur intermédiaire alors l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha_n \in]-\infty\,;\,0[$.

2°) α_n solution de $-x\ln(-x) = \frac{1}{n}$

Evident.

3°) **Etude de la suite (α_n)**

a) **Sens de variation de $h(x) = -x \ln(-x)$**

h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et $h(-1) = 0$

b) **Localisation de α_1.**

$h(-1{,}77) = 1{,}01$ et $h(-1{,}76) = 0{,}99$; $h(-1{,}76) < h(\alpha_1) < h(-1{,}77)$

d'où la localisation cherchée.

c) Croissance de la suite (α_n).

$h(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $h(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$; alors $h(\alpha_{n+1}) < h(\alpha_n)$ puisque la fonction h est strictemet décroissante alors la suite (α_n) est croissante.

4°) Convergence de la suite

la suite (α_n) est croissante et majorée par 0 donc elle converge.

Notons α la limite de cette suite, α_n est solution de l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$,

h est définie sur $]-\infty\,;-1]$ donc $\alpha_n \leq -1$ alors : $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha_n = \alpha \leq -1$.

Partie C

1°) **Etude de la suite (I_n)**

a) Sens de variation

$I_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$, on calcule la différence $I_{n+1} - I_n$., on montre qu'elle est positive.

Pour $x < 0$, $(n+1)x < nx \Rightarrow e^{\frac{1}{(n+1)x}} > e^{\frac{1}{nx}}$ alors en multipliant par $-x > 0$ on a :

$f_{n+1} > f_n$ par suite en intégrant cette inégalité $I_{n+1} > I_n$. Cette suite est croissante.

b) **Majoration de I_n**

$x \in [-1\,;0]$ on a $f_n(x) + x = x\,(1 - e^{\frac{1}{nx}}) \leq 0$, donc $f_n(x) \leq -x$. En intégrant membre à membre on a : $\int_{-1}^{0} f_n(x)dx \leq \int_{-1}^{0} -x dx \quad \Leftrightarrow \quad I_n \leq \frac{1}{2}$

c) **Conclusion**

La suite (I_n) est croissante et majorée donc convergente.

2°) **Limite de la suite**

a) **Une inégalité**

Au A) 2°) d) on a établi pour $x < 0$ que : $0 \leq f_n(x) + (x + \frac{1}{n}) \leq \frac{-1}{2n^2x}$, en intégrant membre à membre on obtient : $0 \leq I_n + \int_{-1}^{0}(x + \frac{1}{n})dx \leq \int_{-1}^{0} \frac{-1}{2n^2x}dx$, on sert d'une partie de cette double inégalité à savoir : $0 \leq I_n + \int_{-1}^{0}(x + \frac{1}{n})dx$: alors $-\int_{-1}^{0}(x + \frac{1}{n})dx \leq I_n$ d'où $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$.

b) **Limite de I_n.**

Finalement on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$. La limite de I_n est donc $\frac{1}{2}$.