REPBLIQUE GABONAISE
OFFICE NATIONAL DU BACCALAUREAT

2006 – 1 – MATHEMATIQUES

Séries : C-E
Durée : 4 heures
Coef. : 5

Exercice 1 : (5 points)

On considère le fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{n!} e^x$.(n entier naturel non nul).

1°) Montrer que si : $0 \leq x \leq 1$ on a, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{e}{n!}$.

2°) Soit $I_n = \displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ pour $0 \leq x \leq 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer I_1.

b) En intégrant par parties I_{n+1} vérifier la relation de récurrence :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{1-x}.$$

c) Démontrer alors que pour tout entier n non nul,

$$I_n = e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

d) En utilisant 1°) déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$; en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$.

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour n entier non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \cdots + \frac{1}{2^n \times n!}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{3 \times 1!} + \frac{1}{3^2 \times 2!} + \cdots + \frac{1}{3^n \times n!}$$

Déterminer $\lim\limits_{n} u_n$, puis $\lim\limits_{n} v_n$.

Exercice 2 (4 points)

1°) a) Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide le PGCD de 6092 et 135.

b) Que peut-on conclure pour les nombres 6092 et 135 ?

2°) Soit l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $6092x + 135y = 1$

Démontrer que tout couple (x ; y) solution de (E) est tel que x et y soient premiers entre eux.

3°) Utiliser l'algorithme d'Euclide de la question 1°)a pour déterminer une solution particulière de (E).

4°) a) Résoudre alors l'équation (E).

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E') : $6092x + 135y = 45$ après avoir montrer que si $(x ; y)$ est solution de (E') alors x est multiple de 45.

5°) Quel est le reste dans la division par 7 de 6092^{135} ?

Problème(11 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie 1

(d_1) est la droite passant par le point J (0 ;1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1 ;1).

(d_2) est l'axe (oy). s_1 est la symétrie orthogonale d'axe (d_1) et s_2 la symétrie orthogonale d'axe (d_2).

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $r = s_2 \circ s_1$.

2°) (d_3) est la droite passant par J et de vecteur directeur $\vec{v}$ (1 ;4), s_3 est la symétrie orthogonale d'axe (d_3).

a) Soit M (x ;y) un point du plan et on pose $M'(x' ; y') = s_3(M)$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 3.

c) Démontrer l'existence d'une unique symétrie orthogonale s_4, telle que $s_4 \circ s_3 = s_2 \circ s_1$. Donner alors l'équation cartésienne de son axe.

Partie 2

Soient les points A (5 ;0), B (4 ;1), A'(-3 ; 2), B' (-4 ; 1) et W(0 ; -3).

1°) Démontrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f (A) = A' et f (B) = B'.

Donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

2°) R est la rotation de centre A et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

a) Montrer que $f = T \circ R$

b) Soit $B_1 = R(B)$. Quelle est la nature du quadrilatère $AA'B'B_1$.

3°) Soit I le milieu du segment [AA'], démontrer que :

$$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi) ; \qquad (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO}) = -\frac{3}{4}\pi \ (2\pi); \qquad (\overrightarrow{WB}, \overrightarrow{WO}) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi).$$

Montrer que ces angles sont égaux modulo π. Que peut-on dire alors dire des points O, I, A, B et W ?

4°) a) Déterminer ($\mathscr{E}$), l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

$$|(1-i)z + 6i| = 2\sqrt{2}$$

b) Soit g la transformation de ($\mathscr{P}$) qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1-i)z + 6i.$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

c) Déterminer K l'antécédent de O par g. En utilisant g retrouver l'ensemble ($\mathscr{E}$).

d) Soit (Γ) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 4\sin^2 t \\ y(t) = 2\sin 2t \end{cases}$$ avec $t \in \mathbb{R}$. M(t) est le point de coordonnées (x(t) ; y(t))

Comparer M(t) et M(t + 2 π), puis M(t) et M(- t). Que peut-on en conclure ?

e) Etudier les variations de : $t \mapsto x(t)$ *et* $t \mapsto y(t)$ sur $[0 ; \pi]$.

f) Tracer la courbe (Γ), démontrer que c'est un cercle de centre O.

Montrer que l'image de ($\mathscr{E}$) par f est (Γ).

CORRIGE DE MATHEMATIQUES– SESSION 2006

SERIE C et E

Exercice 1 (5 points)

Soit $f_n(x) = \dfrac{(1-x)^n}{n!}e^x$

1°) **Encadrement de f_n sur I = [0 ; 1]** $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{e}{n!}$

encadrement direct des fonctions : $x \mapsto x^n$ *et* $x \mapsto e^x$ qui sont croissantes sur I 0,5

2°) a) **Calcul de I_1 par parties** : on pose u(t) = (1 − t) et v'(t)= e^t et on trouve

$$I_1 = e - (1+x)\,e^{1-x}. = e - e^{1-x}(1+\frac{x}{1!})$$ 0,75

b) **Relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}**

Soit $I_{n+1} = \displaystyle\int_{1-x}^{1} \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^t dt$ posons

$u(t) = (1-t)^{n+1}$ $\quad$ *alors* $\quad u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$

$v'(t) = e^t$ $\qquad\qquad v(t) = e^t$ 0,75

après développement on obtient la relation $I_{n+1} = I_n - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x}$ (1)

c) **Egalité** $I_n = e - e^{1-x}(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!})$ 1

elle est obtenue en utilisant plusieurs fois la relation (1) pour différents indices k=1,... jusqu'à $k = n-1$, ensuite on additionne membre à membre, on trouve

$I_n = I_1 - e^{1-x}(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!})$ et $I_1 = e - e^{1-x}(1 + \dfrac{x}{1!})$ cela conduit au résultat.

d) **Limite de I_n**

En intégrant sur $[1-x\,;\,1]$ l'encadrement du 1°) , on en déduite que $0 \leq I_n \leq \dfrac{e \times x}{n!}$ 0,5

D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$ donc $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{1-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right]$ en divisant par e^{1-x} 0,5

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}) = e^x$ 0,5

Applications pour $x = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{1/2}$ $\qquad$ Pour $x = \dfrac{1}{3}$ $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = e^{1/3}$ 0,5

Exercice 2 (4 points)

1°) a) 6092 = 135 × 45 + 17 ; $\qquad$ 135 = 17× 7 + 16 ; $\qquad$ 17 = 16×1 +1

PGCD(6092 ;135) = 1. 0,5

b) Conclusion *les nombres 6092 et 135 sont premiers entre eux.*

2°) (E) : $6092x + 135y = 1$

Soit $(x\,;\,y)$ une solution de (E) et d= PGCD(x ; y) 0,5

il existe k et k' tel que $x = k$ d et $y = k'$d en remplaçant dans (E) on a :

d(6092k + 135k') = 1 donc d/1 alors d=1. x et y sont premiers entre eux.

3°) En utilisant l'algorithme d'Euclide on trouve :

1= 6092×8−135×361 0,5

le couple $(8\ ;\ -361)$ est donc une solution particulière de (E).

4°) a) Résolution de (E)

$$\begin{cases} 6092x+135y=1 \\ 6092\times 8+135\times(-361)=1 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad 6092\,(8-x) = 135\,(y+361)$$

comme 6092 et 135 sont premiers entre eux, en appliquant le théorème de Gauss on obtient $8-x = 135k$ et $y+361 = 6092\,k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. D'où les solutions de (E) 0,75

$S = \{(8-135k\ ;\ -361+6092k)$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$.

4°) b) (E') équivaut à $6092x = 45\,(1-3y)$

Si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E') alors 45 divise $6092x$, or 45 ne divise pas 6092 donc 45 divise x, càd x est multiple de 45.

En prenant $x = 90$ on obtient $y = -4061$, le couple $(90\ ;\ -4061)$ est une solution particulière de (E'). 0,5

Résolution de (E')

$$\begin{cases} 6092x+135y=45 \\ 6092\times 90+135\times(-4061)=45 \end{cases} \quad \text{alors } 6092(x-90) = 135\,(-y-4061)$$

6092 et 135 sont premiers entre eux

donc 135 divise $(x-90)$, il existe λ tel que

$(x-90) = 135\lambda$ alors $(-y-4061)=6092\lambda$. L'ensemble des solutions de (E') est : 0,75

$S = \{\,(90+135\lambda\ ;\ -4061-6092\lambda),\ \lambda \in \mathbb{Z}\}$

5°) $6092 = 870\times 7 + 2$ donc $6092 \equiv 2\ (7)$ par conséquent

$6092^{135} \equiv 2^{135}$ or $135 = 3\times 45$ et $2^{135} \equiv (2^3)^{45} \equiv (1)^{45}\ [7]$ 0,5

Le reste de la division de 6092^{135} par 7 est donc 1.

Problème (11 points)

Partie A (2,5 points)

1°) Nature et éléments caractéristiques de r

la composée de deux symétries d'axes sécants est une rotation de centre le point d'intersection des deux droites et pour angle le double de l'angle des deux droites. 0,5

Donc $r = s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre J, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2°) a) Expression analytique de s_3

(d_3) *est la droite d'équation* $y = 4x + 1$

le milieu de [MM'] $\in (d_3)$ et $\overrightarrow{M'M}$ est orthogonale à $\vec{v}(1\ ;\ 4)$ ce qui conduit à : 1

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{17}(-15x+8y-8) \\[2mm] y' = \dfrac{1}{17}(8x+15y+2) \end{cases}$$

2°) b) Détermination des points M tel que M' $\in$ C(O ; 3)

l'image d'un cercle est un cercle de même rayon par s_3, s_3 est une involution donc $s_3^{-1} = s_3$, l'ensemble cherché est le cercle de centre s_3 (O)=O'= $(-\frac{8}{17}\ ;\ \frac{2}{17})$ et de 0,5

rayon 3.

2°) c) Existence de s_4 et équation cartésienne de (d_4).

La droite (d_3) passe le centre de la rotation r par conséquent il 1

une droite (d_4) et s_4 la symétrie orthogonale par rapport à (d_4) tel que $s_4 \circ s_3 = r$

Une construction possible de la droite (d_4), c'est l'image de (d_3) par la rotation de centre J d'angle $\frac{\pi}{4}$. On sait que (d_4) passe par J, on cherche B' l'image d'un point B de d_3 puis forme l'équation de la droite (JB') = (d_4).

On trouve (d_4) : $5x+3y-3=0$

Partie 2 (8 points)

1°) Existence et unicité de f.

On prouve que AB= A'B'= $\sqrt{2}$ et A $\neq$ A' d'après le cours il existe un et un seul déplacement f tel que $f(A) = A'$ *et* f (B) = B' 0,5

Ecriture complexe de f de la forme $z' = az + b$ on trouve $a = i$ *et* $b = -3 - 3i$

f est la rotation de centre W(0 ; −3) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ 0,5

2°) a) **Montrons que f = T o R**

Ecriture complexe de R : $z' = iz + z_A(1-i) = iz + 5(1-i)$.

Ecriture complexe de T : $z' = z - 8 + 2i$.

$$Z \xrightarrow{R} Z_1 \xrightarrow{T} Z_2$$ 0,5

$Z_1 = iZ + 5(1 - i)$ $Z_2 = Z_1 - 8 + 2i = iZ - 3 - 3i$ *cqfd.*

2°) b) **Nature du quadrilatère $AA'B'B_1$**

Il est évident que c'est un parallélogramme. 0,5

3°) Cocyclicité (aucune méthode n'est imposée)

Les affixes de B et B_1 sont conjugués dont les points B et B_1 sont symétriques par rapport (Ox) (OA) est médiatrice de $[BB_1]$ d'où $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$. 0,25

On démontre de même que

$(\overrightarrow{IB} ; \overrightarrow{IO}) = -\frac{3}{4}\pi(2\pi)$ 0,25

$(\overrightarrow{WB} ; \overrightarrow{WO}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$. 0,25

Il est évident que ces angles ont la même mesure modulo π. Donc les points O, I, A, B et W *sont cocycliques.* 0,25

4°) a) Détermination de $(\mathscr{E})$ c' est le cercle de centre le point U d'affixe $3 - 3i$ *et de rayon* 2. 0,5

b) g est la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$ d'angle $-\frac{\pi}{4}$ de centre le point d'affixe 6. 0,5

c) g(K)= O alors $z_K = 3 - 3i$. 0,25

Utiliser g pour retrouver $(\mathscr{E})$ 0,5

d) il est évident que M(t) = M(t + 2 π) et M(−t) et M(t) sont symétriques par rapport (Ox). On conclut que le domaine d'étude est $[0 ; \pi]$ 0,5

e) Variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ 1

f) Représentation de (Γ) 1

Montrons que c'est un cercle on sait que $2 - 4\sin^2 t = 2\cos 2t$

équivaut ~~Alors~~ $x^2 + y^2 = 2$, cercle de centre O et de rayon 2. 0,25

$F(U) = O$, f est une rotation, conserve les distances, l'image du cercle $(\mathscr{E})$ est le cercle de même rayon et de centre f(U) = O, c'est donc le cercle (Γ)/ 0,5